TỦ SÁCH BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN THCS

ẤN BẢN ĐỘC QUYỀN • CHUẨN GDPT MỚI

★ TUYỂN TẬP CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC ★

299

BÀI TOÁN NÂNG CAO LỚP 7

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ GIỎI & ÔN THI HỌC SINH GIỎI

- **10 Chuyên đề trọng tâm** bao quát toàn diện Số học, Đại số & Hình học phẳng nâng cao lớp 7.
- **Phân dạng khoa học** từ Vận dụng, Vận dụng cao đến các bài toán Học sinh giỏi & Thử thách tư duy.
- **Tách biệt Đề bài & Giải chi tiết** sau mỗi chuyên đề giúp học sinh chủ động rèn luyện độc lập.
- **100% Lời giải chuẩn mực** từng bước lập luận chặt chẽ, kèm hình vẽ minh họa trực quan sắc nét.

BIÊN SOẠN & ĐỘC QUYỀN PHÁT HÀNH

THẦY THẾ ANH – CHUYÊN TOÁN

Hệ thống Giáo dục VipStudy • Đào tạo Toán Chất lượng cao & Luyện thi Học sinh giỏi

Website Chính Thức
https://thaytheanh.com
Lớp Toán 6–12 Uy Tín Hà Nội

Hệ Thống Học Trực Tuyến
https://vipstudy.vn
Học liệu & Khóa học Độc quyền

LỜI TỰA & HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh yêu Toán, quý phụ huynh và quý thầy cô đồng nghiệp thân mến!

Lớp 7 là năm học bản lề đặc biệt quan trọng của bậc Trung học cơ sở — nơi các em chuyển mình từ kỹ năng tính toán số học thuần túy sang tư duy **đại số trừu tượng** (số hữu tỉ, số thực, lũy thừa, giá trị tuyệt đối, tỉ lệ thức, tính chất chia hết & số nguyên tố) và lần đầu tiên làm quen với **chứng minh hình học suy diễn chặt chẽ** (đường thẳng song song, tổng ba góc của tam giác, các trường hợp bằng nhau của tam giác thường và tam giác vuông, tam giác cân – tam giác đều).

Nhằm giúp các em học sinh khá, giỏi có một tài liệu chuẩn mực để rèn luyện tư duy sâu sắc, bứt phá điểm 9–10 trên lớp và chinh phục các kỳ thi **Học sinh giỏi Toán 7 cấp Trường, cấp Quận/Huyện và tuyển chọn đội tuyển**, thầy đã tâm huyết biên soạn và tinh tuyển bộ sách độc quyền: **"299 Bài Toán Nâng Cao Lớp 7 – Độc Quyền Của Thầy Thế Anh Dành Cho Học Sinh Giỏi"**.

1. Nắm vững Lý thuyết & Kỹ thuật mẫu

Đọc kỹ phần *A. Tóm tắt lý thuyết & Phương pháp* đầu mỗi chuyên đề để hiểu bản chất toán học, các hằng đẳng thức quy luật và điều kiện có nghĩa trước khi bắt tay giải bài.

2. Tự lực suy nghĩ trước khi xem Giải

Phần *B. Đề bài* và phần *C. Hướng dẫn giải chi tiết* được thiết kế tách riêng có chủ đích. Hãy tự nháp ít nhất 15–20 phút cho mỗi bài toán nâng cao trước khi đối chiếu lời giải.

3. Trình bày chặt chẽ, không bỏ bước

Ở cấp độ Học sinh giỏi, việc đặt điều kiện xác định, xét đủ trường hợp (đặc biệt trong Giá trị tuyệt đối, Dãy tỉ số bằng nhau, Số nguyên tố) quyết định điểm tối đa của bài thi.

4. Vẽ hình chuẩn xác & Tư duy đường phụ

Với 120 bài Hình học phẳng (Phần II), hãy rèn thói quen vẽ hình rõ nét bằng thước và compa, phân tích giả thiết – kết luận ngược từ dưới lên để phát hiện đường kẻ phụ hợp lý.

Chúc các em nuôi dưỡng niềm say mê vẻ đẹp của Toán học, kiên trì rèn luyện qua từng bài toán trong cuốn sách này và gặt hái những thành tích rực rỡ nhất!

Hà Nội, Năm học 2026 – 2027

THẦY THẾ ANH – CHUYÊN TOÁN

*Website: **thaytheanh.com** • Hệ thống Giáo dục VipStudy: **vipstudy.vn***

MỤC LỤC TỔNG QUÁT

Hệ thống 10 Chuyên đề trọng tâm • 299 Bài toán nâng cao & Lời giải chi tiết

✦ Lời nói đầu & Phương pháp tự học đạt giải Học sinh giỏi 1

PHẦN I. ĐẠI SỐ VÀ SỐ HỌC NÂNG CAO (Bài 1 – Bài 179) 3

Chuyên đề 01 **SỐ HỮU TỈ VÀ CÁC PHÉP TOÁN DÃY QUY LUẬT** (Bài 1 – Bài 35) **4**
A. Tóm tắt lý thuyết & Phương pháp (4) • B. Đề bài rèn luyện (5) • C. Hướng dẫn giải chi tiết (12)

Chuyên đề 02 **LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ** (Bài 36 – Bài 67) **29**
A. Tóm tắt lý thuyết & Phương pháp (29) • B. Đề bài rèn luyện (30) • C. Hướng dẫn giải chi tiết (35)

Chuyên đề 03 **SỐ VÔ TỈ – CĂN BẬC HAI SỐ HỌC – SỐ THỰC** (Bài 68 – Bài 92) **50**
A. Tóm tắt lý thuyết & Phương pháp (50) • B. Đề bài rèn luyện (51) • C. Hướng dẫn giải chi tiết (56)

Chuyên đề 04 **GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ THỰC VÀ BÀI TOÁN CỰC TRỊ** (Bài 93 – Bài 124) **71**
A. Tóm tắt lý thuyết & Phương pháp (71) • B. Đề bài rèn luyện (72) • C. Hướng dẫn giải chi tiết (78)

Chuyên đề 05 **TÍNH CHẤT CHIA HẾT TRÊN TẬP SỐ NGUYÊN VÀ SỐ NGUYÊN TỐ** (Bài 125 – Bài 154) **95**
A. Tóm tắt lý thuyết & Phương pháp (95) • B. Đề bài rèn luyện (96) • C. Hướng dẫn giải chi tiết (101)

Chuyên đề 06 **TỈ LỆ THỨC VÀ TÍNH CHẤT DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU** (Bài 155 – Bài 179) **117**
A. Tóm tắt lý thuyết & Phương pháp (117) • B. Đề bài rèn luyện (118) • C. Hướng dẫn giải chi tiết (123)

PHẦN II. HÌNH HỌC PHẲNG NÂNG CAO (Bài 180 – Bài 299) 139

Chuyên đề 07 **GÓC Ở VỊ TRÍ ĐẶC BIỆT – TIA PHÂN GIÁC – HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG** (Bài 180 – Bài 209) **140**
A. Tóm tắt lý thuyết & Phương pháp (140) • B. Đề bài rèn luyện (141) • C. Hướng dẫn giải chi tiết (149)

Chuyên đề 08 **TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC VÀ GÓC NGOÀI TAM GIÁC** (Bài 210 – Bài 237) **163**
A. Tóm tắt lý thuyết & Phương pháp (163) • B. Đề bài rèn luyện (164) • C. Hướng dẫn giải chi tiết (171)

Chuyên đề 09 **CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VÀ TAM GIÁC VUÔNG** (Bài 238 – Bài 269) **190**
A. Tóm tắt lý thuyết & Phương pháp (190) • B. Đề bài rèn luyện (191) • C. Hướng dẫn giải chi tiết (198)

Chuyên đề 10 **TAM GIÁC CÂN – TAM GIÁC ĐỀU VÀ BÀI TOÁN TỔNG HỢP HÌNH HỌC HSG** (Bài 270 – Bài 299) **220**
A. Tóm tắt lý thuyết & Phương pháp (220) • B. Đề bài rèn luyện (221) • C. Hướng dẫn giải chi tiết (228)

PHẦN THỨ NHẤT

ĐẠI SỐ & SỐ HỌC NÂNG CAO

Hệ thống 179 bài toán tinh tuyển (từ Bài 1 đến Bài 179) thuộc 6 chuyên đề cốt lõi: Số hữu tỉ & Dãy quy luật, Lũy thừa, Căn bậc hai & Số thực, Giá trị tuyệt đối & Cực trị, Chia hết & Số nguyên tố, Tỉ lệ thức & Dãy tỉ số bằng nhau.

6 Chuyên đề trọng tâm • 179 Bài toán chọn lọc • 100% Giải chi tiết từng bước

CHUYÊN ĐỀ 01 • BÀI 1 ĐẾN BÀI 35 (35 BÀI TOÁN)

SỐ HỮU TỈ VÀ CÁC PHÉP TOÁN DÃY QUY LUẬT

Biến đổi đại số hợp lý, phân số tầng, tổng dãy phân số có quy luật và bài toán tìm ẩn nâng cao

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Tập hợp số hữu tỉ và các tính chất đại số nền tảng

Định nghĩa và biểu diễn: Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$. Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là $\mathbb{Q}$. Mọi số hữu tỉ dương luôn lớn hơn 0, mọi số hữu tỉ âm luôn nhỏ hơn 0; đặc biệt, phân số $\frac{a}{b} > 0$ khi và chỉ khi a, b cùng dấu, và $\frac{a}{b} < 0$ khi và chỉ khi a, b trái dấu.

Biểu diễn phân số tối giản trong bài toán HSG: Mọi số hữu tỉ dương $x \in \mathbb{Q}$ đều biểu diễn duy nhất dưới dạng phân số tối giản $x = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $(a, b) = 1$ (trong đó kí hiệu $(a, b) = 1$ chỉ hai số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau). Khi đó, nếu $(k \cdot a) \vdots b$ thì bắt buộc $k \vdots b$ (bổ đề Euclid — công cụ cốt lõi để giải các bài toán tính nguyên của biểu thức hữu tỉ).

Tính chất trù mật và đóng kín của $\mathbb{Q}$: Tập hợp $\mathbb{Q}$ đóng kín đối với bốn phép toán cộng, trừ, nhân, chia (với số chia khác 0). Nếu $a, b \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn $a < b$ thì trung bình cộng $c = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ luôn thỏa mãn $a < c < b$; do đó giữa hai số hữu tỉ phân biệt luôn có vô số số hữu tỉ. Ngoài ra, nếu $r, s \in \mathbb{Q}$ và α là số vô tỉ (chẳng hạn $\alpha = \sqrt{2}$) sao cho $r \cdot \alpha = s$ thì bắt buộc $r = 0$ và $s = 0$.

2. Kỹ thuật rút gọn phân số tầng, tổng và tích dãy phân số có quy luật

Kỹ thuật đặt thừa số chung ở phân số phức hợp và phân số tầng: Khi gặp phân thức có nhiều số hạng thập phân, hỗn số đan dấu như $\frac{k \cdot u_1 + k \cdot u_2 + k \cdot u_3}{m \cdot u_1 + m \cdot u_2 + m \cdot u_3}$, ta đưa các số thập phân và hỗn số về phân số tối giản để phát hiện tỉ lệ đồng dạng $\frac{k(u_1+u_2+u_3)}{m(u_1+u_2+u_3)} = \frac{k}{m}$. Với **liên phân số (phân số tầng nhiều lớp)**, thực hiện quy đồng tuần tự từ tầng thấp nhất ngược lên tầng trên cùng.

Công thức khử liên tiếp (Telescoping Sum) cho tổng dãy phân số: Với mọi $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}; \qquad \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

và với dãy bình phương ở mẫu: $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

Kỹ thuật phân tích nhân tử cho tích dãy phân số và dãy lũy thừa: Với biểu thức dạng tích $\prod \left(1 \pm \frac{c}{u_n}\right)$, ta quy đồng từng ngoặc rồi phân tích tử số, mẫu số thành tích hai thừa số để triệt tiêu chéo liên tiếp. Với tổng dạng $A = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{q^k}$ ($q \neq 1$), ta nhân cả hai vế với cơ số q rồi lấy $qA - A$ để đưa về tổng cấp số nhân quen thuộc.

3. Phương pháp tìm ẩn, chứng minh bất đẳng thức dãy số và cực trị hữu tỉ

Phương trình tổng phân thức có hằng số ẩn (cộng/trừ 1 vào mỗi phân thức): Với phương trình dạng $\frac{x+a_1}{b_1} + \frac{x+a_2}{b_2} = \frac{x+a_3}{b_3} + \frac{x+a_4}{b_4}$ mà $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = a_4 + b_4 = k$, ta cộng 1 vào mỗi phân thức để xuất hiện nhân tử chung $(x + k)$ (hoặc trừ 1 nếu $a_i - b_i$ không đổi).

Phương pháp làm trội – làm giảm chứng minh dãy phân số không nguyên: Để chứng minh tổng S không phải là số tự nhiên (hoặc số nguyên), ta tìm hai số nguyên liên tiếp m và $m+1$ sao cho $m < S < m+1$ bằng cách: (i) thay $\dfrac{1}{k^2}$ bởi $\dfrac{1}{(k-1)k}$ hoặc $\dfrac{1}{k(k+1)}$; (ii) chia nhóm các phân số có mẫu gần nhau; hoặc (iii) dùng bổ đề $\dfrac{m}{n} < \dfrac{m+c}{n+c}$ với mọi $0 < m < n$ và $c > 0$.

Bài toán nghiệm nguyên và GTLN – GTNN: Đưa phương trình phân thức nguyên về dạng tích $U(x)\cdot V(y) = k \in \mathbb{Z}$ để xét ước (kết hợp tính chẵn lẻ hoặc chia hết để giảm số trường hợp). Với cực trị biểu thức hữu tỉ, sử dụng tính không âm của lũy thừa bậc chẵn $[f(x)]^{2k} \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$.

B HỆ THỐNG BÀI TẬP TUYỂN CHỌN (BÀI 1 – BÀI 35)

Dạng 1: Thực hiện phép tính hợp lý và rút gọn phân số tầng

Bài 1. Vận dụng

Tính hợp lý giá trị của các biểu thức sau:

- a) $A = \dfrac{7}{13}\cdot\dfrac{5}{9} - \dfrac{5}{9}\cdot\left(-\dfrac{2}{13}\right) - \dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{18}{13}$;
- b) $B = \left(-\dfrac{5}{23}\right)\cdot\dfrac{4}{11} + \left(-\dfrac{5}{23}\right)\cdot\dfrac{5}{11} + \dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{-14}{23}$;
- c) $C = \left(\dfrac{2027}{2022} + \dfrac{2024}{2025} + \dfrac{-2023}{2026}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6}\right)$.

Bài 2. Vận dụng

Thực hiện phép tính bằng cách hợp lý nhất:

- a) $M = \left(3\dfrac{4}{7} - 3\dfrac{2}{5}\right) : \left(3\dfrac{1}{8} - 2\dfrac{3}{4}\right) + \left(1\dfrac{4}{7} - 2\dfrac{2}{5}\right) : \left(1\dfrac{1}{8} - 4\dfrac{3}{4}\right)$;
- b) $N = \dfrac{7}{3}\cdot\left(\dfrac{-3}{4} + \dfrac{2}{5}\right) + \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{-1}{4}\right) : \dfrac{3}{7}$.

Bài 3. Vận dụng

Rút gọn các biểu thức chứa lũy thừa của số hữu tỉ sau:

- a) $P = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 25\cdot\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 : \left(\dfrac{5}{4}\right)^3\right] : \left(\dfrac{3}{2}\right)^3$;
- b) $Q = \dfrac{18^6\cdot 2^{12}\cdot 4^3\cdot 9^3}{2^{11}\cdot 6^9\cdot 27^3}$;
- c) $R = \dfrac{8^5\cdot(-5)^8 + (-2)^5\cdot 10^9}{2^{16}\cdot 5^7 + 20^8}$.

Bài 4. Vận dụng cao

Không quy đồng trực tiếp toàn bộ biểu thức, hãy tính hợp lý giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{0{,}4 - \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{11}}{1{,}4 - \dfrac{7}{9} + \dfrac{7}{11}} - \frac{\dfrac{1}{3} - 0{,}25 + \dfrac{1}{5}}{1\dfrac{1}{6} - 0{,}875 + 0{,}7}$$

Bài 5. Vận dụng cao

Tính hợp lý giá trị của các biểu thức phân số sau:

- a) $A = \dfrac{1-\dfrac{2}{7}+\dfrac{2}{11}}{2{,}5-\dfrac{5}{7}+\dfrac{5}{11}} + \dfrac{-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-0{,}2}{1\dfrac{2}{3}-2{,}5+1}$;
- b) $B = \dfrac{0{,}4-\dfrac{2}{7}+\dfrac{2}{11}}{\dfrac{3}{7}-\dfrac{3}{11}-0{,}6} - \dfrac{\dfrac{1}{3}-0{,}25+\dfrac{1}{5}}{0{,}5-\dfrac{3}{8}+0{,}3}$.

Bài 6. Vận dụng cao

Tính giá trị của biểu thức phân số tầng sau:

$$P = \frac{\left(16\frac{1}{4}-9\frac{3}{16}-7\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{-48}{37}\right)+5\frac{3}{4}}{\left(5\frac{2}{7}-\frac{16}{3}\right):\left(6\frac{2}{3}-6\frac{1}{2}\right)}$$

Bài 7. HSG & Thử thách

Rút gọn các biểu thức liên phân số (phân số tầng nhiều lớp) dưới đây:

- a) $M = 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5}}}}$;
- b) $N = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}} : \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4}}}$.

Dạng 2: Tính tổng và tích dãy phân số có quy luật khử liên tiếp

Bài 8. Vận dụng

Tính giá trị của các tổng dãy phân số có quy luật sau:

- a) $A = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$;
- b) $B = \dfrac{2}{1\cdot 4}+\dfrac{2}{4\cdot 7}+\dfrac{2}{7\cdot 10}+\cdots+\dfrac{2}{97\cdot 100}$.

Bài 9. Vận dụng

Tính giá trị của biểu thức tích các phân số có quy luật:

$$B = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{15}\right)\left(1-\frac{1}{21}\right)\left(1-\frac{1}{28}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)$$

Bài 10. Vận dụng cao

Tính giá trị của biểu thức:

$$B = \left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\left(1-\frac{2}{4\cdot 5}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{99\cdot 100}\right)$$

$$B=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}\right)}{-3\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}\right)}-\frac{2\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)}{3\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)}=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$

Kết luận: $A=\frac{1}{5}; B=-\frac{4}{3}$.

Lời giải Bài 6

Dạng 1: Thực hiện phép tính hợp lý và rút gọn phân số tầng

Ta tính riêng tử thức T và mẫu thức M của biểu thức P:

- **Tính tử thức T:** Tách phần nguyên và phần phân số của các hỗn số trong ngoặc:

$$16\frac{1}{4}-9\frac{3}{16}-7\frac{5}{6}=(16-9-7)+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{16}-\frac{5}{6}\right)=0+\frac{12-9-40}{48}=-\frac{37}{48}$$

Suy ra:

$$T=\left(-\frac{37}{48}\right)\cdot\left(\frac{-48}{37}\right)+5\frac{3}{4}=1+\frac{23}{4}=\frac{27}{4}$$

- **Tính mẫu thức M:** Chú ý $\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$, ta tách phần nguyên tương tự:

$$M=\left(5\frac{2}{7}-5\frac{1}{3}\right):\left(6\frac{2}{3}-6\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{21}\right):\frac{1}{6}=-\frac{1}{21}\cdot 6=-\frac{2}{7}$$

- **Tính giá trị của P:**

$$P=\frac{T}{M}=\frac{27}{4}:\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{27}{4}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{189}{8}$$

Kết luận: $P=-\frac{189}{8}$.

Lời giải Bài 7

Dạng 1: Thực hiện phép tính hợp lý và rút gọn phân số tầng

- **a)** Thực hiện quy đồng lần lượt từ tầng dưới cùng ngược lên trên:
- Tầng thứ nhất: $4+\frac{1}{5}=\frac{21}{5}$, suy ra $\frac{1}{4+\frac{1}{5}}=\frac{5}{21}$.
- Tầng thứ hai: $3+\frac{5}{21}=\frac{63+5}{21}=\frac{68}{21}$, suy ra $\frac{1}{3+\frac{5}{21}}=\frac{21}{68}$.
- Tầng thứ ba: $2+\frac{21}{68}=\frac{136+21}{68}=\frac{157}{68}$, suy ra $\frac{1}{2+\frac{21}{68}}=\frac{68}{157}$.
- Do đó: $M=1+\frac{68}{157}=\frac{225}{157}$.
- **b)** Rút gọn từng liên phân số trong phép chia:
- Số bị chia: $2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}\Rightarrow 1+\frac{1}{\frac{7}{3}}=1+\frac{3}{7}=\frac{10}{7}\Rightarrow\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}=\frac{7}{10}$.
- Số chia: $3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}\Rightarrow 2+\frac{1}{\frac{13}{4}}=2+\frac{4}{13}=\frac{30}{13}\Rightarrow\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}=\frac{13}{30}$.
- Thực hiện phép chia: $N=\frac{7}{10}:\frac{13}{30}=\frac{7}{10}\cdot\frac{30}{13}=\frac{21}{13}$.

Kết luận: $M = \dfrac{225}{157}$; $N = \dfrac{21}{13}$.

Lời giải Bài 8

Dạng 2: Tính tổng và tích dãy phân số có quy luật khử liên tiếp

- **a)** Áp dụng công thức tách $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

Khử liên tiếp các số hạng đối nhau ở giữa, ta được:

$$A = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

- **b)** Nhận xét hiệu hai thừa số ở mỗi mẫu bằng 3, ta biến đổi $\dfrac{3}{n(n+3)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+3}$, suy ra:

$$B = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{3}{97 \cdot 100}\right)$$

$$B = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100}\right)$$

$$B = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{99}{100} = \frac{33}{50}$$

Kết luận: $A = \dfrac{99}{100}$; $B = \dfrac{33}{50}$.

Lời giải Bài 9

Dạng 2: Tính tổng và tích dãy phân số có quy luật khử liên tiếp

Quy đồng mẫu số từng thừa số trong ngoặc:

$$B = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{27}{28} \cdot \frac{35}{36}$$

Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân số với 2 để xuất hiện tích hai số tự nhiên ở mẫu và tử:

$$B = \frac{4}{6} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{28}{30} \cdot \frac{40}{42} \cdot \frac{54}{56} \cdot \frac{70}{72}$$

Phân tích mỗi tử số dạng $(k-1)(k+2)$ và mỗi mẫu số dạng $k(k+1)$ (với $k = 2, 3, \ldots, 8$):

$$B = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 6} \cdot \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 7} \cdot \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 8} \cdot \frac{7 \cdot 10}{8 \cdot 9}$$

Gom các thừa số thứ nhất với nhau và các thừa số thứ hai với nhau để rút gọn:

$$B = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) \cdot (4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10)}{(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{12}$$

Kết luận: $B = \dfrac{5}{12}$.

Lời giải Bài 10

Dạng 2: Tính tổng và tích dãy phân số có quy luật khử liên tiếp

Xét thừa số tổng quát dạng $1 - \dfrac{2}{n(n+1)}$ với $n \in \{2; 3; 4; \ldots; 99\}$, ta có:

$$2\big(|a+b-c|+|b+c-a|+|c+a-b|\big)\ge 2\big(|a|+|b|+|c|\big).$$

Chia cả hai vế cho $2>0$, ta suy ra $|a+b-c|+|b+c-a|+|c+a-b|\ge |a|+|b|+|c|$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ba biểu thức $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ đôi một cùng dấu (kể cả bằng 0), tức là cả ba biểu thức cùng không âm hoặc cùng không dương.

b) Vì $|x|<1$ và $|x|\ge 0$ nên $|x|^2<1^2\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow 1-x^2>0$. Hoàn toàn tương tự, từ $|y|<1$ suy ra $1-y^2>0$.

Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng để xét hiệu hai bình phương:

$$(1+xy)^2-(x+y)^2=(1+xy)(1+xy)-(x+y)(x+y)$$

$$=(1+2xy+x^2y^2)-(x^2+2xy+y^2)=1-x^2-y^2+x^2y^2$$

$$=(1-x^2)-y^2(1-x^2)=(1-x^2)(1-y^2).$$

Vì $1-x^2>0$ và $1-y^2>0$ nên tích $(1-x^2)(1-y^2)>0$, suy ra $(x+y)^2<(1+xy)^2$, hay $|x+y|^2<|1+xy|^2$.

Do $|x+y|\ge 0$ và $|1+xy|\ge 0$, khai phương hai vế không âm ta thu được:

$$\sqrt{|x+y|^2}<\sqrt{|1+xy|^2}\Longleftrightarrow |x+y|<|1+xy| \quad (\text{đpcm}).$$

CHUYÊN ĐỀ 05 • BÀI 125 ĐẾN BÀI 154 (30 BÀI TOÁN)

TÍNH CHẤT CHIA HẾT TRÊN TẬP SỐ NGUYÊN VÀ SỐ NGUYÊN TỐ

Chứng minh chia hết, tìm điều kiện nguyên, bài toán số nguyên tố – hợp số – số chính phương và nghiệm nguyên

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Tính chất chia hết trên tập số nguyên, Đồng dư thức & Số chính phương

Các tính chất chia hết cốt lõi trên $\mathbb{Z}$: Với $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$ $(m, n \neq 0)$:

- **Tính chất cộng – trừ và tổ hợp tuyến tính:** Nếu $a \vdots m$ và $b \vdots m$ thì $(ka + lb) \vdots m$ với mọi $k, l \in \mathbb{Z}$. Nếu $a \vdots m$ nhưng b không chia hết cho m thì $(a \pm b)$ không chia hết cho m.
- **Chia hết cho tích các số nguyên tố cùng nhau:** Nếu $a \vdots m$, $a \vdots n$ và $\text{ƯCLN}(|m|, |n|) = 1$ — kí hiệu gọn là $(m, n) = 1$ — thì $a \vdots (mn)$.
- **Tính chất nguyên tố cùng nhau & Bổ đề Euclid:** Nếu $ab \vdots m$ và $(b, m) = 1$ thì $a \vdots m$. Đặc biệt, với p là số nguyên tố: nếu $ab \vdots p$ thì $a \vdots p$ hoặc $b \vdots p$; hệ quả: nếu $a^n \vdots p$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ thì $a \vdots p$.

Tích các số nguyên liên tiếp & Hiệu lũy thừa đặc biệt:

- Tích của 2 số nguyên liên tiếp $n(n+1)$ luôn chia hết cho 2; tích của 2 số chẵn liên tiếp $2k(2k+2) = 4k(k+1)$ luôn chia hết cho 8.
- Tích của 3 số nguyên liên tiếp $(n-1)n(n+1) = n^3 - n$ luôn chia hết cho 6 (vừa chia hết cho 2, vừa chia hết cho 3). Do đó với mọi $a \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $(a^3 - a) \vdots 6$.
- Tích của 5 số nguyên liên tiếp $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ luôn chia hết cho 5 (và chia hết cho 120). Từ đó suy ra $(a^5 - a) \vdots 5$ (mở rộng hơn: $(a^5 - a) \vdots 30$) với mọi $a \in \mathbb{Z}$.

Đồng dư thức (công cụ rút gọn số dư lũy thừa): Với $m \in \mathbb{N}^*$, hai số nguyên a, b có cùng số dư khi chia cho m (tức $(a - b) \vdots m$) được kí hiệu là $a \equiv b \pmod{m}$. Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $c \equiv d \pmod{m}$ thì:

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}; \qquad ac \equiv bd \pmod{m}; \qquad a^n \equiv b^n \pmod{m} \ (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Tính chất số dư của số chính phương (phản chứng cực mạnh): Với mọi số nguyên a:

- a^2 chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 (nếu a không chia hết cho 3 thì $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$).
- a^2 chia cho 4 chỉ dư 0 hoặc 1 (nếu a chẵn thì $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$; nếu a lẻ thì $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$).
- a^2 chia cho 5 chỉ dư 0, 1 hoặc 4 (không bao giờ dư 2 hoặc 3).
- a^2 chia cho 8 chỉ dư 0, 1 hoặc 4; đặc biệt **bình phương của mọi số nguyên lẻ chia cho 8 luôn dư 1**, tức $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1 \equiv 1 \pmod{8}$.

2. Số nguyên tố – Hợp số & Các bổ đề kinh điển dành cho Học sinh giỏi

Định nghĩa và phân loại số nguyên tố theo số dư:

- **Số nguyên tố** là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có đúng hai ước tự nhiên là 1 và chính nó. **Hợp số** là số tự nhiên lớn hơn 1 có nhiều hơn hai ước tự nhiên. Số 0 và số 1 không là số nguyên tố, cũng không là hợp số.
- **Tính chẵn lẻ:** Số 2 là **số nguyên tố chẵn duy nhất**; mọi số nguyên tố $p > 2$ đều là số lẻ.
- **Dạng chia cho 3 và 6:** Mọi số nguyên tố $p > 3$ khi chia cho 3 chỉ có thể dư 1 hoặc 2 ($p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$), và khi chia cho 6 chỉ có dạng $6k+1$ hoặc $6k+5$.

PHẦN THỨ HAI

HÌNH HỌC PHẲNG NÂNG CAO

Hệ thống 120 bài toán đặc sắc (từ Bài 180 đến Bài 299) thuộc 4 chuyên đề Hình học lớp 7: Góc & Hai đường thẳng song song, Tổng ba góc của tam giác, Các trường hợp bằng nhau của tam giác & tam giác vuông, Tam giác cân – Tam giác đều & Toán tổng hợp HSG.

4 Chuyên đề trọng tâm • 120 Bài toán chọn lọc • Hình vẽ trực quan & Chứng minh chặt chẽ

CHUYÊN ĐỀ 07 • BÀI 180 ĐẾN BÀI 209 (30 BÀI TOÁN)

GÓC Ở VỊ TRÍ ĐẶC BIỆT – TIA PHÂN GIÁC – HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Tính chất góc đối đỉnh, kề bù, tia phân giác và kỹ thuật kẻ đường thẳng phụ song song trong bài toán tính góc – chứng minh song song

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Kiến thức nền tảng & Tính chất mở rộng

Các cặp góc ở vị trí đặc biệt:

- **Hai góc kề bù:** Là hai góc vừa kề nhau (có một cạnh chung, hai cạnh còn lại nằm về hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa cạnh chung), vừa bù nhau (có tổng số đo bằng 180°). Nếu tia Oz nằm giữa hai tia đối nhau Ox và Oy thì $\widehat{xOz} + \widehat{zOy} = 180^\circ$.
- **Hai góc đối đỉnh:** Là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia. *Định lý:* Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.
- **Tổng các góc quanh một điểm:** Nếu k tia chung gốc O chia mặt phẳng thành k góc liên tiếp không có điểm trong chung thì tổng số đo của k góc đó luôn bằng 360°.

Tia phân giác của một góc & Hai định lý mở rộng quan trọng:

- Tia Oz là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ khi tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Oy và $\widehat{xOz} = \widehat{zOy} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$.
- **Tính chất 1:** Hai tia phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau (tạo thành góc 90°).
- **Tính chất 2:** Hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.

Dấu hiệu nhận biết, Tiên đề Euclid & Tính chất hai đường thẳng song song:

- **Dấu hiệu nhận biết:** Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng phân biệt a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc *so le trong* bằng nhau, hoặc một cặp góc *đồng vị* bằng nhau (hoặc một cặp góc *trong cùng phía* bù nhau — có tổng bằng 180°) thì $a \parallel b$.
- **Tiên đề Euclid:** Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.
- **Tính chất:** Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì: (i) Hai góc so le trong bằng nhau; (ii) Hai góc đồng vị bằng nhau; (iii) Hai góc trong cùng phía bù nhau (tổng bằng 180°).

Quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song:

- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau: $\begin{cases} a \perp c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$ (a, b phân biệt).
- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia: $\begin{cases} a \parallel b \\ c \perp a \end{cases} \Rightarrow c \perp b.$
- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau: $\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$ (a, b phân biệt).

CHUYÊN ĐỀ 09 • BÀI 238 ĐẾN BÀI 269 (32 BÀI TOÁN)

CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VÀ TAM GIÁC VUÔNG

Chứng minh hai tam giác bằng nhau (c.c.c, c.g.c, g.c.g, ch-gn, ch-cgv) và kỹ thuật kẻ đường phụ trong Hình học HSG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM & PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Định nghĩa & Ba trường hợp bằng nhau của hai tam giác thường

Định nghĩa hai tam giác bằng nhau: Hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$ được gọi là bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau và các góc tương ứng bằng nhau: $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = FE$ và $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{C} = \widehat{F}$. Khi viết ký hiệu $\triangle ABC = \triangle DEF$, bắt buộc phải viết đúng thứ tự các đỉnh tương ứng.

Trường hợp 1 — Cạnh – cạnh – cạnh (c.c.c): Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia ($AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$) thì hai tam giác đó bằng nhau: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.c.c).

Trường hợp 2 — Cạnh – góc – cạnh (c.g.c): Nếu hai cạnh và *góc xen giữa* của tam giác này bằng hai cạnh và *góc xen giữa* của tam giác kia ($AB = A'B'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $BC = B'C'$) thì hai tam giác đó bằng nhau: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.g.c). Lưu ý: Hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau và một cặp góc bằng nhau nhưng *không xen giữa* thì nói chung chưa chắc bằng nhau.

Trường hợp 3 — Góc – cạnh – góc (g.c.g): Nếu một cạnh và *hai góc kề* cạnh ấy của tam giác này bằng một cạnh và *hai góc kề* cạnh ấy của tam giác kia ($\widehat{A} = \widehat{A'}$, $AB = A'B'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$) thì hai tam giác đó bằng nhau: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (g.c.g). Hệ quả: Nếu hai góc bất kỳ và một cạnh của tam giác này bằng hai góc và cạnh tương ứng của tam giác kia thì nhờ định lý tổng ba góc bằng 180°, ta suy ra cặp góc thứ ba bằng nhau và đưa về trường hợp (g.c.g).

2. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông

Hai trường hợp suy ra trực tiếp từ tam giác thường: (1) *Hai cạnh góc vuông:* Hai tam giác vuông có hai cạnh góc vuông tương ứng bằng nhau thì bằng nhau (theo c.g.c). (2) *Cạnh góc vuông – góc nhọn kề:* Hai tam giác vuông có một cạnh góc vuông và góc nhọn kề cạnh ấy bằng nhau thì bằng nhau (theo g.c.g).

Trường hợp đặc biệt 1 — Cạnh huyền – góc nhọn (ch-gn): Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia ($\triangle ABC$ vuông tại A, $\triangle A'B'C'$ vuông tại A' có $BC = B'C'$ và $\widehat{B} = \widehat{B'}$) thì hai tam giác vuông đó bằng nhau: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (cạnh huyền – góc nhọn).

Trường hợp đặc biệt 2 — Cạnh huyền – cạnh góc vuông (ch-cgv): Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia ($\triangle ABC$ vuông tại A, $\triangle A'B'C'$ vuông tại A' có $BC = B'C'$ và $AB = A'B'$) thì hai tam giác vuông đó bằng nhau: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Kỹ thuật cộng góc phụ nhau trong tam giác vuông: Trong $\triangle ABC$ vuông tại A, hai góc nhọn phụ nhau ($\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$). Nếu hai góc cùng phụ với một góc thứ ba (ví dụ $\widehat{x} + \widehat{z} = 90^\circ$ và $\widehat{y} + \widehat{z} = 90^\circ$) thì $\widehat{x} = \widehat{y}$. Đây là chìa khóa vàng để tìm cặp góc nhọn bằng nhau trong các bài toán có nhiều đường vuông góc.

3. Các phương pháp chứng minh hình học & Kỹ thuật kẻ đường phụ HSG Lớp 7

Chứng minh ba điểm thẳng hàng & đường thẳng đồng quy: Để chứng minh ba điểm M, A, N thẳng hàng, ta thường chứng minh $\widehat{MAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAN} = 180^\circ$ (dựa vào tổng ba góc của tam giác hoặc hai góc kề bù), hoặc chứng minh hai tia AM, AD cùng là tia phân giác của một góc nên trùng nhau. Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy, gọi O là giao điểm của hai đường thẳng rồi chứng minh ba điểm tạo bởi O và hai điểm thuộc đường thẳng thứ ba thẳng hàng.

Kỹ thuật nối đường chéo thay thế tứ giác đặc biệt (chuẩn Lớp 7): Khi gặp cấu hình hai cặp đường thẳng song song ($AB \parallel CD$ và $AD \parallel BC$) hoặc ba góc vuông, ta **nối đường chéo** (ví dụ nối AC hoặc BD) rồi chứng minh $\triangle ABC = \triangle CDA$ (theo g.c.g nhờ hai cặp góc so le trong bằng nhau) hoặc hai tam giác vuông bằng nhau theo (ch-gn) để suy ra các cặp

cạnh đối bằng nhau ($AB = CD$, $AD = BC$).

Kỹ thuật gấp đôi đường trung tuyến: Khi giả thiết cho M là trung điểm của cạnh BC (hoặc cần chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$), trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$. Khi đó $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c), giúp chuyển cạnh AB về CD và tạo thêm cặp đường thẳng song song $AB \parallel CD$.

Kỹ thuật kẻ đường vuông góc phụ hoặc tia phân giác phụ (chia để trị): Để chứng minh đẳng thức dạng $a + b = c$ (hoặc $a - b = c$), ta kẻ thêm đường vuông góc phụ hoặc tia phân giác phụ để chia đoạn c thành hai đoạn nhỏ $c_1 + c_2 = c$, rồi dùng hai cặp tam giác bằng nhau chứng minh $a = c_1$ và $b = c_2$.

B HỆ THỐNG BÀI TẬP TUYỂN CHỌN (BÀI 238 – BÀI 269)

Dạng 1: Trường hợp bằng nhau cạnh – cạnh – cạnh (c.c.c) và cạnh – góc – cạnh (c.g.c)

Bài 238. Vận dụng

Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = DE = EC$ (D nằm giữa B và E). Biết rằng $AD = AE$.

a) Chứng minh $\triangle ABD = \triangle ACE$.

b) Chứng minh $\widehat{EAB} = \widehat{DAC}$.

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh tia AM là tia phân giác của $\widehat{DAE}$.

d) Giả sử $\widehat{DAE} = 60^\circ$. Tính số đo các góc còn lại của $\triangle DAE$.

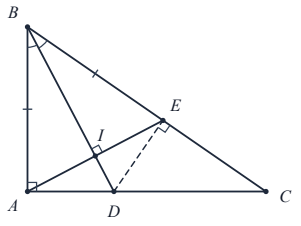
Bài 239. Vận dụng

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt cạnh AC tại D. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$ (xem hình vẽ minh họa).

a) Chứng minh $DA = DE$.

b) Tính số đo $\widehat{BED}$.

c) Gọi I là giao điểm của AE và BD. Chứng minh $AE \perp BD$ tại I.

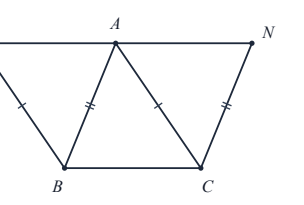


Bài 240. Vận dụng

Cho $\triangle ABC$. Về cùng một phía với điểm A đối với đường thẳng BC, vẽ các đoạn thẳng BM và CN sao cho $BM \parallel AC$, $BM = AC$ và $CN \parallel AB$, $CN = AB$ (xem hình vẽ minh họa). Chứng minh rằng:

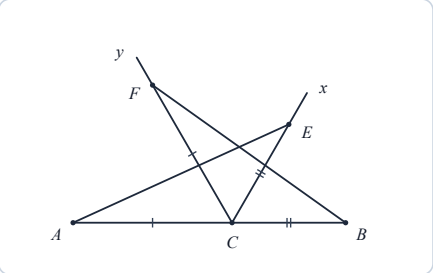
a) $\triangle BAM = \triangle ABC$ và $\triangle ABC = \triangle CNA$.

b) Điểm A là trung điểm của đoạn thẳng MN.



Bài 241. Vận dụng

Cho ba điểm A, C, B thẳng hàng theo thứ tự đó (C nằm giữa A và B). Về cùng một phía đối với đường thẳng AB, vẽ hai tia Cx và Cy sao cho $\widehat{BCx} = 60^\circ$ và $\widehat{BCy} = 120^\circ$. Lấy điểm E thuộc tia Cx, điểm F thuộc tia Cy sao cho $CE = CB$ và $CF = CA$ (xem hình vẽ minh họa). Chứng minh rằng $AE = BF$.



Bài 242. Vận dụng cao

Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của cạnh BC. Kẻ $BH \perp AM$ tại H (H thuộc đường thẳng AM, H khác M). Trên đường thẳng AM lấy điểm K sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng HK. Chứng minh rằng:

a) $CK \perp AM$.

b) $CH \parallel BK$.

Bài 243. Vận dụng cao

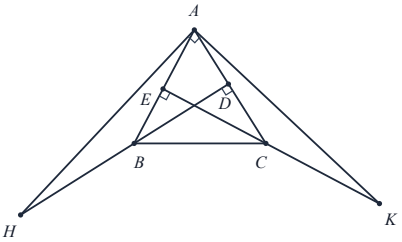
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{ACB} = 45^\circ$. Vẽ tia phân giác AD của $\widehat{BAC}$ ($D \in BC$). Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho $AE = BC$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $CF = AB$. Chứng minh rằng:

a) $BE = BF$.

b) $BE \perp BF$.

Bài 244. HSG & Thử thách

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Kẻ $BD \perp AC$ tại D ($D \in AC$) và $CE \perp AB$ tại E ($E \in AB$). Trên tia đối của tia BD lấy điểm H sao cho $BH = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$ (xem hình vẽ minh họa). Chứng minh rằng $AH = AK$ và $AH \perp AK$.



Dạng 2: Trường hợp góc – cạnh – góc (g.c.g) & Chứng minh thẳng hàng, trung điểm, đồng quy

Bài 245. Vận dụng

Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $AM = AN$ (M khác A, B). Gọi I là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng:

a) $BN = CM$.

b) $\triangle BMC = \triangle CNB$ và $\triangle BIM = \triangle CIN$.

c) Tia AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

Bài 246. Vận dụng

Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn thẳng (hai đường thẳng AB và CD phân biệt). Lấy điểm E trên đoạn thẳng AD và điểm F trên đoạn thẳng BC sao cho $AE = BF$. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng và O là trung điểm của đoạn thẳng EF.

Nghệ thuật dựng tam giác đều phụ trong bài toán tính góc khó: Khi trong hình xuất hiện các số đo góc đặc biệt như $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 80^\circ, 100^\circ$ mà việc cộng góc thông thường dẫn đến phương trình đồng nhất $0 = 0$, ta dựng thêm một **tam giác đều phụ** trên một cạnh đã cho (hoặc kẻ tia phụ tách góc tạo tam giác cân – tam giác đều như bài toán Langley) để tạo ra các góc 60° và các cặp cạnh bằng nhau mới, kết nối giả thiết rời rạc thành những tam giác bằng nhau.

B HỆ THỐNG BÀI TẬP TUYỂN CHỌN (BÀI 270 – BÀI 299)

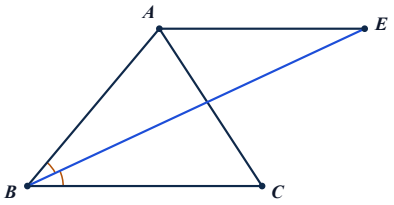
Dạng 1: Tính số đo góc trong cấu hình tam giác cân, tam giác vuông cân và tam giác đều

Bài 270. Vận dụng

Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{ABC} = 50^\circ$. Từ đỉnh A kẻ đường thẳng song song với BC cắt tia phân giác của $\widehat{ABC}$ ở E.

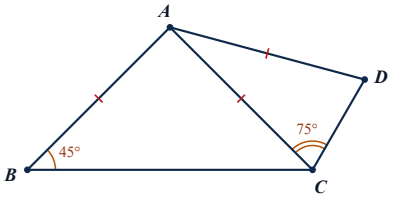
a) Chứng minh $\triangle AEB$ là tam giác cân.

b) Tính số đo $\widehat{BAE}$.



Bài 271. Vận dụng

Cho hình vẽ minh họa dưới đây, biết bốn điểm A, B, C, D thỏa mãn tia AC nằm giữa hai tia AB, AD và $AB = AC = AD$. Biết $\widehat{ABC} = 45^\circ$ và $\widehat{ACD} = 75^\circ$. Tính số đo $\widehat{BAD}$.



Bài 272. Vận dụng

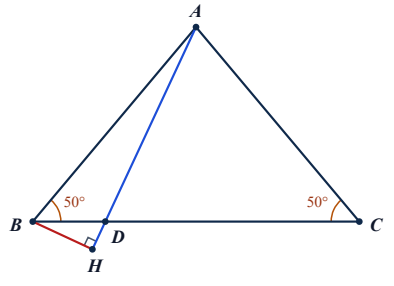
Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

a) Tam giác ACE là tam giác gì? Vì sao?

b) Tam giác BCE là tam giác gì? Tính số đo các góc của $\triangle BCE$.

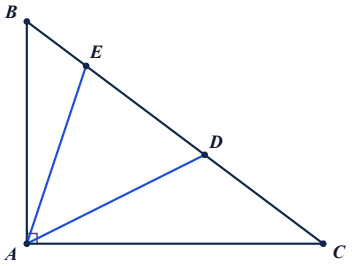
Bài 273. Vận dụng

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 50^\circ$. Trên cạnh CB lấy điểm D sao cho $CD = CA$. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AD tại H. Tính số đo $\widehat{DBH}$.



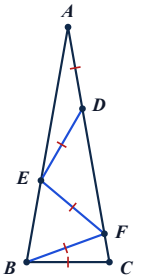
Bài 274. Vận dụng cao

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Trên cạnh huyền BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = BA$ và $CE = CA$. Chứng minh rằng số đo $\widehat{DAE}$ không phụ thuộc vào độ lớn các góc nhọn của $\triangle ABC$ và tính số đo đó.



Bài 275. HSG & Thử thách

Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Trên cạnh AC lấy hai điểm D, F (D nằm giữa A và F) và trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AD = DE = EF = FB = BC$. Tính số đo $\widehat{BAC}$.



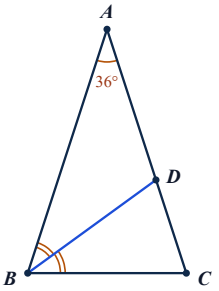
Dạng 2: Chứng minh tam giác cân, tam giác vuông cân và hệ thức độ dài đoạn thẳng

Bài 276. Vận dụng

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{BAC} = 36^\circ$. Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt cạnh AC ở D.

a) Tính số đo các góc của $\triangle ABD$ và $\triangle BCD$.

b) Chứng minh rằng $AD = BD = BC$.



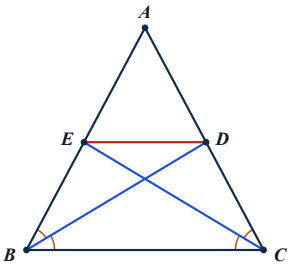
Bài 277. Vận dụng

Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ và tia phân giác của $\widehat{ACB}$ cắt cạnh AC, AB lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng:

a) $\triangle AED$ là tam giác cân;

b) $DE \parallel BC$;

c) $BE = ED = DC$.

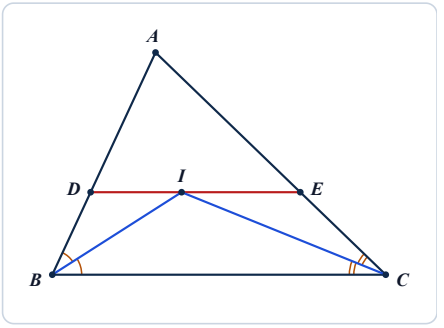


Bài 278. Vận dụng

Cho $\triangle ABC$. Các tia phân giác của $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ cắt nhau tại I. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt cạnh AB tại D và cắt cạnh AC tại E.

a) Chứng minh $\triangle DBI$ và $\triangle ECI$ là các tam giác cân.

b) Chứng minh $DE = BD + CE$ và chu vi $\triangle ADE$ bằng $AB + AC$.



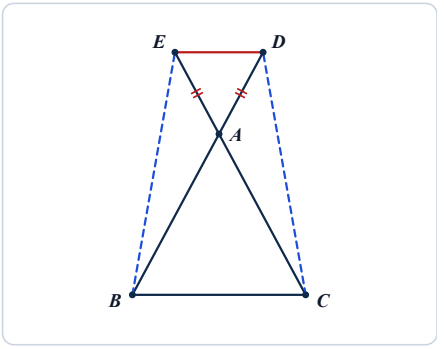
Bài 279. Vận dụng

Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Chứng minh rằng:

a) $DE \parallel BC$;

b) $BE = CD$;

c) $\triangle BED = \triangle CDE$, từ đó suy ra giao điểm I của hai đường thẳng BE và CD cách đều hai đỉnh B và C.



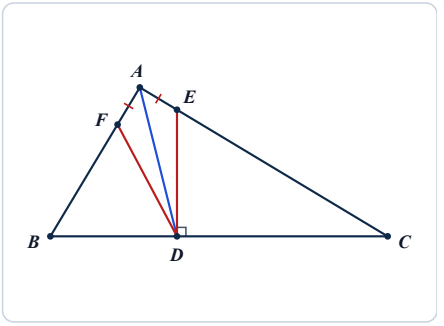
Bài 280. Vận dụng cao

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$). Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại D. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại D, cắt cạnh AC tại E. Trên cạnh AB lấy điểm F sao cho $AF = AE$. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ABC} = \widehat{DEC}$;

b) $\triangle DBF$ là tam giác cân;

c) $DB = DE$.

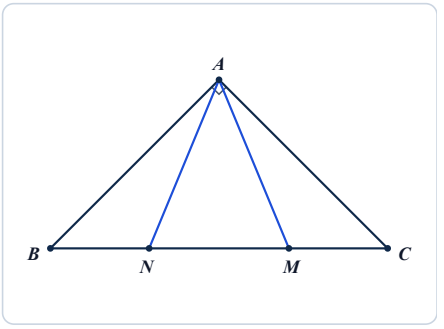


Bài 281. Vận dụng cao

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A. Trên cạnh huyền BC lấy hai điểm M và N sao cho $BM = CN = AB$.

a) Chứng minh $\triangle ANB = \triangle AMC$, từ đó suy ra $\triangle AMN$ là tam giác cân.

b) Tính số đo $\widehat{MAN}$.



Bài 282. Vận dụng cao

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Kẻ $AH \perp BC$ tại H. Tia phân giác của $\widehat{BAH}$ cắt BH tại D. Trên tia CA lấy điểm K sao cho $CK = CB$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ADC$ là tam giác cân;

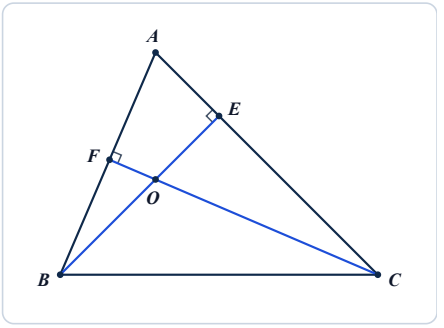
b) $BK \parallel AD$ và $DK \parallel AH$.

Bài 283. HSG & Thử thách

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Kẻ $BE \perp AC$ tại E ($E \in AC$) và $CF \perp AB$ tại F ($F \in AB$). Gọi O là giao điểm của BE và CF. Biết rằng $OC = AB$.

a) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle OCE$, từ đó tính số đo $\widehat{ACB}$.

b) (Mở rộng): Nếu bỏ giả thiết $\triangle ABC$ nhọn và thay bằng $\widehat{ACB} > 90^\circ$, các đường thẳng $BE \perp AC$ tại E và $CF \perp AB$ tại F vẫn cắt nhau tại O thỏa mãn $OC = AB$, hãy tính số đo $\widehat{ACB}$.



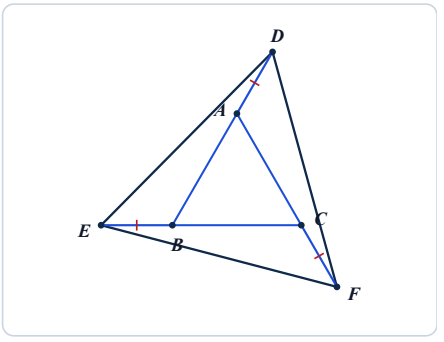
Dạng 3: Tam giác đều và cấu hình dựng các tam giác đều trên cạnh của tam giác

Bài 284. Vận dụng

Cho $\triangle ABC$ đều. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D, trên tia đối của tia BC lấy điểm E, trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $AD = BE = CF$.

a) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle CAD$.

b) Chứng minh $\triangle DEF$ là tam giác đều.



Bài 285. Vận dụng cao

Cho $\triangle ABC$ đều. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = BN = CP$ (M khác A, B).

a) Chứng minh $\triangle MNP$ là tam giác đều.

b) Biết thêm $BM = 2AM$, chứng minh rằng $MN \perp BC$, $NP \perp CA$ và $PM \perp AB$.

Bài 286. Vận dụng cao

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Về phía ngoài $\triangle ABC$, dựng các tam giác đều $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$. Gọi I là giao điểm của BE và CD; gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BE và CD. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ABE = \triangle ADC$, từ đó suy ra $BE = CD$;

b) $\widehat{BIC} = 120^\circ$;

c) $\triangle AMN$ là tam giác đều.

