BẢN ĐỌC THỬ MIỄN PHÍ • 6/30 BÀI

TÀI LIỆU ÔN TẬP • TOÁN 11

30 BÀI TOÁN NÂNG CAO

Ôn thi cuối học kì 1 – Toán 11

Tuyển chọn từ đề cuối học kì 1 của các trường • Năm học 2023 – 2026

- ✓ 30 bài vận dụng – vận dụng cao chọn lọc từ đề thi thật của các trường
- ✓ Chia theo dạng toán, có mức độ ★ để luyện từ dễ đến khó
- ✓ Lời giải chi tiết từng bước + nhận xét, mẹo nhận dạng sau mỗi bài
- ✓ Ghi rõ nguồn đề (trường, năm học) – đã đối chiếu bản gốc

BIÊN SOẠN

Thầy Thế Anh

Điện thoại / Zalo: **0986 683 218**

Website: thaytheanh.com

Quét mã QR để nhắn Zalo cho thầy hoặc vào nhóm học tập: hỏi bài trong sách, nhận thêm đề và tài liệu Toán.

Zalo Thầy Thế Anh
0986 683 218

Nhóm học tập Zalo
Quét để tham gia

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh lớp 11 thân mến,

Đề kiểm tra cuối học kì 1 theo cấu trúc mới gồm trắc nghiệm nhiều lựa chọn, đúng – sai và trả lời ngắn (nhiều trường có thêm tự luận). Để đạt điểm 9, điểm 10 các em phải làm được những câu vận dụng, vận dụng cao – thường là bài toán thực tế hoặc câu đúng – sai cần lập luận chặt chẽ.

Cuốn sách này tuyển chọn 30 bài như vậy từ đề thi thật của nhiều trường trong những năm gần đây, sắp xếp theo dạng để các em nhận ra "khuôn" của từng loại bài. Mỗi bài đều có lời giải chi tiết và phần nhận xét chỉ ra ý tưởng then chốt – điều quan trọng hơn cả đáp số.

Chúc các em ôn tập hiệu quả và đạt kết quả thật cao!

Thầy Thế Anh

CÁCH DÙNG SÁCH HIỆU QUẢ

Bước 1. Tự làm bài ít nhất 15–20 phút trước khi xem lời giải. Bí thì đọc lại tên dạng và phần nhận xét của bài trước đó trong cùng dạng.

Bước 2. Đối chiếu lời giải, chú ý cách trình bày – đây là cách trình bày được chấm đủ điểm.

Bước 3. Đọc phần **Nhận xét** và ghi lại ý tưởng chính vào sổ tay.

Bước 4. Sau 3–5 ngày, làm lại những bài đã sai mà không xem lời giải.

Mức độ: ★☆☆ vận dụng • ★★☆ vận dụng cao • ★★★ thử thách (dành cho HS giỏi).

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU **2**

PHẦN 1. ĐỀ BÀI **4**

DẠNG 1. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT 4

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC VÀ BÀI TOÁN THỰC TẾ 5

PHẦN 2. LỜI GIẢI CHI TIẾT **6**

ĐỌC TIẾP BẢN ĐẦY ĐỦ **11**

PHẦN 1. ĐỀ BÀI

DẠNG 1. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT

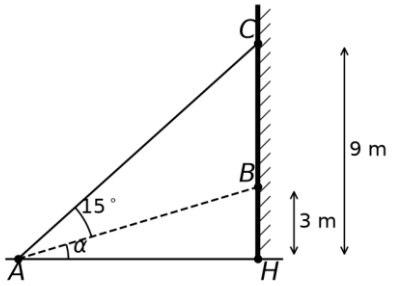
Bài 1. (★☆☆) Cho $\tan x = -2$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính giá trị biểu thức $P = \cos 2x - 2\cos x + 1$.

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 11 năm học 2023 – 2024, trường THPT Thanh Đa – TP Hồ Chí Minh)

Bài 2. (★★☆) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^2 x - \cos x - 1$ với $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 11 năm học 2023 – 2024, trường THPT Mạc Đĩnh Chi – TP Hồ Chí Minh)

Bài 3. (★★☆) Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất ở vị trí A để ngắm các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng mục tiêu B cách mặt đất 3 m tại góc ngắm α (góc hợp bởi phương bắn với phương ngang). Nếu tăng thêm góc ngắm đó $15°$ thì vận động viên bắn trúng mục tiêu C cách mặt đất 9 m (hình vẽ minh họa). Khi đó khoảng cách từ vận động viên đến bức tường lớn nhất bằng bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 11 năm học 2025 – 2026, trường THPT Nguyễn Trãi – Đà Nẵng)

Bài 4. (★★☆) Cho $\tan \alpha = 5$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$$

(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 11 năm học 2025 – 2026, trường THPT Lê Trọng Tấn – TP Hồ Chí Minh)

Bài 5. (★★★) Cho hai số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\sin(a+b) = 2\cos(a-b)$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{1}{2 - \sin 2a} + \frac{1}{2 - \sin 2b}.$$

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 11 năm học 2023 – 2024, Sở GD&ĐT Bà Rịa – Vũng Tàu)

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC VÀ BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài 6. (★☆☆) Tìm số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ trên đoạn $[-2\pi;5\pi]$.

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 11 năm học 2025 – 2026, trường THPT Nguyễn Thái Bình – TP Hồ Chí Minh)

PHẦN 2. LỜI GIẢI CHI TIẾT

DẠNG 1. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT

Bài 1 ★☆☆

Từ hệ thức $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ ta có

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}.$$

Vì $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ nên $\cos x<0$, do đó $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Theo công thức nhân đôi:

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\cdot\frac{1}{5}-1=-\frac{3}{5}.$$

Thay vào biểu thức P:

$$P=-\frac{3}{5}-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+1=\frac{2}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2+2\sqrt{5}}{5}.$$

Kết luận: $P=\frac{2+2\sqrt{5}}{5}\approx 1{,}29$.

NHẬN XÉT

Biết $\tan x$, ta tính $\cos^2 x$ nhờ hệ thức $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, rồi dựa vào **góc phần tư** chứa x để chọn dấu của $\cos x$. Có thể kiểm tra lại $\cos 2x$ bằng công thức $\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}$.

Bài 2 ★★☆

Đặt $t=\cos x$. Trên đoạn $[0;\frac{\pi}{2}]$, hàm số cos nghịch biến từ $\cos 0=1$ xuống $\cos\frac{\pi}{2}=0$, nên t nhận mọi giá trị thuộc đoạn $[0;1]$.

Khi đó $y=f(t)=t^2-t-1$ với $t\in[0;1]$. Ta viết lại

$$f(t)=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}.$$

Vì $0\le t\le 1$ nên $-\frac{1}{2}\le t-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$, suy ra $0\le\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$. Do đó

$$-\frac{5}{4}\le f(t)\le\frac{1}{4}-\frac{5}{4}=-1.$$

Dấu bằng ở vế trái xảy ra khi $t=\frac{1}{2}$, tức là $\cos x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}\in[0;\frac{\pi}{2}]$.

Dấu bằng ở vế phải xảy ra khi $t=0$ hoặc $t=1$, tức là $x=\frac{\pi}{2}$ hoặc $x=0$.

Kết luận: $\max\limits_{[0;\frac{\pi}{2}]} y=-1$, đạt tại $x=0$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}$; $\min\limits_{[0;\frac{\pi}{2}]} y=-\frac{5}{4}$, đạt tại $x=\frac{\pi}{3}$.

NHẬN XÉT

Hàm số là tam thức bậc hai theo $\cos x$: đặt ẩn phụ $t=\cos x$ và **tìm đúng miền giá trị của t – ở đây là** $[0;1]$ chứ không phải $[-1;1]$. Đỉnh $t=\frac{1}{2}$ nằm trong miền nên giá trị nhỏ nhất đạt tại đỉnh, còn giá trị lớn nhất đạt tại một đầu mút.

Bài 3 ★★☆

Gọi H là chân bức tường và $d=AH$ (m), $d>0$. Các tam giác AHB, AHC vuông tại H với $\widehat{BAH}=\alpha$, $\widehat{CAH}=\alpha+15°$ và $0°<\alpha<\alpha+15°<90°$. Ta có

$$\tan\alpha=\frac{BH}{AH}=\frac{3}{d},\qquad \tan(\alpha+15°)=\frac{CH}{AH}=\frac{9}{d}.$$

Đặt $k=\tan 15°$. Theo công thức hiệu:

$$k=\tan(45°-30°)=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

Theo công thức cộng:

$$\tan(\alpha+15°)=\frac{\tan\alpha+k}{1-k\tan\alpha}\Leftrightarrow\frac{9}{d}=\frac{\frac{3}{d}+k}{1-\frac{3k}{d}}=\frac{3+kd}{d-3k}.$$

Vì $\alpha+15°<90°$ nên $1-k\tan\alpha>0$, tức là $d-3k>0$. Quy đồng:

$$9(d-3k)=d(3+kd)\Leftrightarrow kd^2-6d+27k=0.$$

Thay $k=2-\sqrt{3}$ rồi nhân hai vế với $2+\sqrt{3}$ (chú ý $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$):

$$d^2-6(2+\sqrt{3})d+27=0.$$

Phương trình có $\Delta'=9(2+\sqrt{3})^2-27=9(7+4\sqrt{3})-27=36(1+\sqrt{3})>0$, nên có hai nghiệm

$$d_1=3(2+\sqrt{3})+6\sqrt{1+\sqrt{3}}\approx 21{,}11;\qquad d_2=3(2+\sqrt{3})-6\sqrt{1+\sqrt{3}}\approx 1{,}28.$$

Cả hai nghiệm đều dương và lớn hơn $3k = 3\left(2-\sqrt{3}\right) \approx 0{,}80$, nên cả hai đều ứng với một vị trí thực sự của vận động viên.

Thử lại với $d_1 \approx 21{,}11$: $\tan\alpha \approx 0{,}142$ nên $\alpha \approx 8{,}09°$; khi đó $\tan(\alpha+15°) \approx \tan 23{,}09° \approx 0{,}426 \approx \frac{9}{21{,}11}$, đúng.

Kết luận: khoảng cách lớn nhất từ vận động viên đến bức tường là $3\left(2+\sqrt{3}\right)+6\sqrt{1+\sqrt{3}} \approx 21{,}1$ m.

NHẬN XÉT

"Tăng góc thêm $15°$" là tín hiệu dùng công thức cộng $\tan(a+b)$. Chọn ẩn là khoảng cách d, bài toán dẫn đến phương trình bậc hai có **hai nghiệm dương đều thỏa mãn**, vì vậy đề mới hỏi khoảng cách "lớn nhất". Mẹo nhân với $2+\sqrt{3}$ giúp hệ số gọn hơn nhiều.

Bài 4 ★★☆

Vì $\tan\alpha = 5$ xác định nên $\cos\alpha \neq 0$. Tử số là biểu thức bậc nhất, mẫu số có các hạng tử bậc ba và bậc nhất theo $\sin\alpha$, $\cos\alpha$; ta chia cả tử và mẫu cho $\cos^3\alpha$.

Chú ý rằng $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$, do đó

$$\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} = \tan\alpha(1+\tan^2\alpha), \qquad \frac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha} = 1+\tan^2\alpha, \qquad \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} = \tan^3\alpha.$$

Khi đó

$$M = \frac{\tan\alpha(1+\tan^2\alpha)-(1+\tan^2\alpha)}{\tan^3\alpha+3+2\tan\alpha(1+\tan^2\alpha)} = \frac{(\tan\alpha-1)(1+\tan^2\alpha)}{3\tan^3\alpha+2\tan\alpha+3}.$$

Thay $\tan\alpha = 5$, ta có $1+\tan^2\alpha = 26$ và

$$M = \frac{4\cdot 26}{3\cdot 125+2\cdot 5+3} = \frac{104}{388} = \frac{26}{97}.$$

Kết luận: $M = \frac{26}{97} \approx 0{,}27$.

NHẬN XÉT

Với biểu thức "đẳng cấp" theo $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ mà tử và mẫu **không cùng bậc**, ta chia cho $\cos$ với số mũ bằng bậc cao nhất, rồi "nâng bậc" phần còn thiếu nhờ $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$. Sai lầm hay gặp: chia tử cho $\cos\alpha$ nhưng chia mẫu cho $\cos^3\alpha$.

Bài 5 ★★★

Vì $\sin 2a \le 1$, $\sin 2b \le 1$ nên các mẫu số đều dương, biểu thức P luôn xác định. Quy đồng mẫu số:

$$P = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{4 - 2(\sin 2a + \sin 2b) + \sin 2a \sin 2b}.$$

Đặt $u = \cos(a - b)$, khi đó giả thiết cho $\sin(a + b) = 2u$. Vì $|\sin(a + b)| \le 1$ nên $|u| \le \frac{1}{2}$.

Tính tổng. Theo công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\sin 2a + \sin 2b = 2\sin(a + b)\cos(a - b) = 2 \cdot 2u \cdot u = 4u^2.$$

Tính tích. Theo công thức biến đổi tích thành tổng và công thức nhân đôi:

$$\sin 2a \sin 2b = \frac{1}{2}[\cos(2a - 2b) - \cos(2a + 2b)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2u^2 - 1) - \left(1 - 2\sin^2(a + b)\right)\right].$$

$$\Rightarrow \sin 2a \sin 2b = u^2 - 1 + \sin^2(a + b) = u^2 - 1 + 4u^2 = 5u^2 - 1.$$

Do đó tử số bằng $4 - 4u^2 = 4(1 - u^2)$ và mẫu số bằng

$$4 - 8u^2 + 5u^2 - 1 = 3 - 3u^2 = 3(1 - u^2).$$

Vì $|u| \le \frac{1}{2}$ nên $1 - u^2 \ge \frac{3}{4} > 0$. Rút gọn:

$$P = \frac{4(1 - u^2)}{3(1 - u^2)} = \frac{4}{3}.$$

Kết luận: $P = \frac{4}{3}$.

NHẬN XÉT

Giả thiết chứa $a + b$, $a - b$ còn biểu thức chứa $2a$, $2b$; mà $2a = (a + b) + (a - b)$, $2b = (a + b) - (a - b)$. Vì thế ta dùng công thức tổng thành tích, tích thành tổng để đưa mọi thứ về **một đại lượng** $\cos(a - b)$. Đừng quên kiểm tra $1 - u^2 \ne 0$ trước khi rút gọn.

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC VÀ BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài 6 ★☆☆

Vì $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ nên phương trình tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Họ thứ nhất. Điều kiện $x \in [-2\pi; 5\pi]$ tương đương với

$$-2\pi \le -\frac{\pi}{12} + k\pi \le 5\pi \Leftrightarrow -\frac{23}{12} \le k \le \frac{61}{12}.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$: họ này có 7 nghiệm thuộc đoạn đã cho.

Họ thứ hai. Tương tự:

$$-2\pi \le \frac{\pi}{4} + k\pi \le 5\pi \Leftrightarrow -\frac{9}{4} \le k \le \frac{19}{4}.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$: họ này cũng có 7 nghiệm.

Hai họ không có nghiệm chung. Nếu $-\frac{\pi}{12} + k\pi = \frac{\pi}{4} + l\pi$ với $k, l \in \mathbb{Z}$ thì $(k - l)\pi = \frac{\pi}{3}$, tức là $k - l = \frac{1}{3}$, vô lí.

Kết luận: phương trình có $7 + 7 = 14$ nghiệm trên đoạn $[-2\pi; 5\pi]$.

NHẬN XÉT

Cách làm chuẩn: viết nghiệm thành từng họ, đưa điều kiện về bất phương trình theo k rồi đếm số nguyên k; nhớ kiểm tra **các họ có trùng nhau không**. Kiểm tra nhanh: hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn chu kì π, mỗi chu kì có đúng 2 nghiệm; đoạn đã cho dài 7π và hai đầu mút không là nghiệm nên có $7 \cdot 2 = 14$ nghiệm.

ĐỌC TIẾP BẢN ĐẦY ĐỦ

Bạn vừa đọc 6/30 bài của cuốn sách.

Bản đầy đủ gồm 30 bài, lời giải chi tiết và nhận xét – giá ưu đãi chỉ **39.000đ**.

Nhắn Zalo **0986 683 218** với nội dung: "T11HK1" để nhận sách ngay.

ĐĂNG KÍ HỌC THỬ MIỄN PHÍ

- Lớp Toán Thầy Thế Anh nhận học sinh THCS – THPT theo nhóm nhỏ, học **online** hoặc **trực tiếp** tại Hà Nội.
- Lớp nâng cao – học sinh giỏi, củng cố nền tảng và luyện đề kiểm tra trên lớp.
- Tặng **1 buổi học thử miễn phí** và **bài kiểm tra đánh giá năng lực** để thầy xếp lớp phù hợp.

Nhắn Zalo **0986 683 218** • Cú pháp: HỌC THỬ + LỚP 11 + TÊN HỌC SINH

Website: thaytheanh.com

BIÊN SOẠN

Thầy Thế Anh

Điện thoại / Zalo: **0986 683 218**

Website: thaytheanh.com

Quét mã QR để nhắn Zalo cho thầy hoặc vào nhóm học tập: hỏi bài trong sách, nhận thêm đề và tài liệu Toán.

Zalo Thầy Thế Anh
0986 683 218

Nhóm học tập Zalo
Quét để tham gia

Đề bài được tuyển chọn từ đề kiểm tra công khai của các trường; lời giải và nhận xét do Thầy Thế Anh biên soạn. Tài liệu dành cho học sinh sử dụng cá nhân – vui lòng không chia sẻ lại bản đầy đủ.