BẢN ĐỌC THỬ MIỄN PHÍ • 6/30 BÀI

TÀI LIỆU ÔN TẬP • TOÁN 12

30 BÀI TOÁN NÂNG CAO

Ôn thi cuối học kì 1 – Toán 12

Tuyển chọn từ đề cuối học kì 1 của các trường • Năm học 2024 – 2026

- ✓ 30 bài vận dụng – vận dụng cao chọn lọc từ đề thi thật của các trường
- ✓ Chia theo dạng toán, có mức độ ★ để luyện từ dễ đến khó
- ✓ Lời giải chi tiết từng bước + nhận xét, mẹo nhận dạng sau mỗi bài
- ✓ Ghi rõ nguồn đề (trường, năm học) – đã đối chiếu bản gốc

BIÊN SOẠN

Thầy Thế Anh

Điện thoại / Zalo: **0986 683 218**

Website: thaytheanh.com

Quét mã QR để nhắn Zalo cho thầy hoặc vào nhóm học tập: hỏi bài trong sách, nhận thêm đề và tài liệu Toán.

Zalo Thầy Thế Anh
0986 683 218

Nhóm học tập Zalo
Quét để tham gia

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh lớp 12 thân mến,

Đề kiểm tra cuối học kì 1 theo cấu trúc mới gồm trắc nghiệm nhiều lựa chọn, đúng – sai và trả lời ngắn (nhiều trường có thêm tự luận). Để đạt điểm 9, điểm 10 các em phải làm được những câu vận dụng, vận dụng cao – thường là bài toán thực tế hoặc câu đúng – sai cần lập luận chặt chẽ.

Cuốn sách này tuyển chọn 30 bài như vậy từ đề thi thật của nhiều trường trong những năm gần đây, sắp xếp theo dạng để các em nhận ra "khuôn" của từng loại bài. Mỗi bài đều có lời giải chi tiết và phần nhận xét chỉ ra ý tưởng then chốt – điều quan trọng hơn cả đáp số.

Chúc các em ôn tập hiệu quả và đạt kết quả thật cao!

Thầy Thế Anh

CÁCH DÙNG SÁCH HIỆU QUẢ

Bước 1. Tự làm bài ít nhất 15–20 phút trước khi xem lời giải. Bí thì đọc lại tên dạng và phần nhận xét của bài trước đó trong cùng dạng.

Bước 2. Đối chiếu lời giải, chú ý cách trình bày – đây là cách trình bày được chấm đủ điểm.

Bước 3. Đọc phần **Nhận xét** và ghi lại ý tưởng chính vào sổ tay.

Bước 4. Sau 3–5 ngày, làm lại những bài đã sai mà không xem lời giải.

Mức độ: ★☆☆ vận dụng • ★★☆ vận dụng cao • ★★★ thử thách (dành cho HS giỏi).

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU **2**

PHẦN 1. ĐỀ BÀI **4**

DẠNG 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ 4

DẠNG 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT VÀ BÀI TOÁN TỐI ƯU THỰC TẾ 5

PHẦN 2. LỜI GIẢI CHI TIẾT **6**

ĐỌC TIẾP BẢN ĐẦY ĐỦ **12**

PHẦN 1. ĐỀ BÀI

DẠNG 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. (★☆☆) Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \le t \le 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (đơn vị là trăm người) và t là thời gian (tuần). Gọi $(a; b)$ là khoảng thời gian lâu nhất mà số người bị nhiễm bệnh tăng lên. Tính giá trị $P = 2a^2 - b^2$.

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 12 năm học 2025 – 2026, trường THPT Nhữ Văn Lan – Hải Phòng)

Bài 2. (★★☆) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm $M(1; 0)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c) Cực đại của hàm số bằng -1.

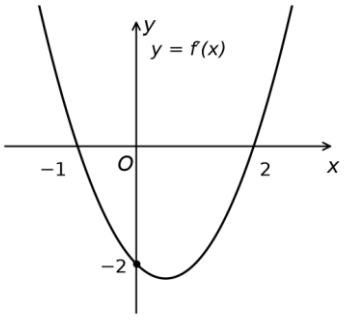
d) Có 2 giá trị nguyên của m để phương trình $x^3 - 3x + 2 = 3m - 2$ có hai nghiệm phân biệt.

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 12 năm học 2025 – 2026, trường THPT Nguyễn Thái Bình – TP Hồ Chí Minh)

Bài 3. (★★☆) Cho hàm số đa thức bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết điểm $A(-2; 3)$ và $B(1; 0)$ lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho, tính giá trị biểu thức $a + 9bc + d$.

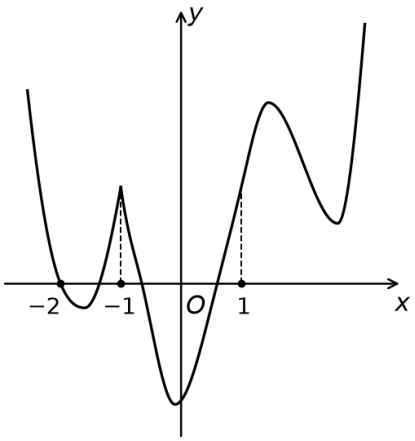
(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 12 năm học 2024 – 2025, trường THCS & THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm – Hà Nội)

Bài 4. (★★☆) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị của đạo hàm là một parabol như hình bên dưới. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$, biết $f(0) = \frac{13}{6}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 12 năm học 2025 – 2026, trường THPT Lương Thế Vinh – TP Hồ Chí Minh)

Bài 5. (★★★) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(-|x| + 1)$ là bao nhiêu?



(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 12 năm học 2024 – 2025, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong – TP Hồ Chí Minh)

DẠNG 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT VÀ BÀI TOÁN TỐI ƯU THỰC TẾ

Bài 6. (★☆☆) Một người thợ muốn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật không nắp từ $216\ \text{cm}^2$ vật liệu nhôm cao cấp. Biết đáy thùng là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Thể tích của thùng lớn nhất bằng bao nhiêu cm^3?

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 12 năm học 2025 – 2026, trường THPT Nguyễn Trãi – Đà Nẵng)

PHẦN 2. LỜI GIẢI CHI TIẾT

DẠNG 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 1 ★☆☆

Số người bị nhiễm bệnh tăng lên trên khoảng nào thì hàm số $N(t)$ đồng biến trên khoảng đó. Ta có

$$N'(t) = -3t^2 + 24t = 3t(8 - t).$$

$N'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 8$. Xét dấu trên đoạn $[0; 12]$:

• Với $0 < t < 8$: $3t > 0$ và $8 - t > 0$ nên $N'(t) > 0$, hàm số $N(t)$ đồng biến trên $(0; 8)$.

• Với $8 < t < 12$: $3t > 0$ và $8 - t < 0$ nên $N'(t) < 0$, hàm số $N(t)$ nghịch biến trên $(8; 12)$.

Vậy số người bị nhiễm bệnh tăng lên trong khoảng thời gian $(0; 8)$ và giảm dần trong khoảng $(8; 12)$. Khoảng thời gian lâu nhất mà số người nhiễm bệnh tăng lên là $(0; 8)$, tức là $a = 0, b = 8$.

Do đó

$$P = 2a^2 - b^2 = 2 \cdot 0^2 - 8^2 = -64.$$

Đáp số: -64.

NHẬN XÉT

Bài toán thực tế "khi nào đại lượng tăng, giảm" chính là bài toán xét tính đơn điệu: tính đạo hàm, xét dấu **trong miền** $0 \le t \le 12$ của đề**. Ý nghĩa thực tế: dịch bệnh đạt đỉnh ở tuần thứ 8 với** $N(8) = 256$ (trăm người), sau đó số ca nhiễm giảm dần.

Bài 2 ★★☆

Tập xác định $\mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

• $f'(x) > 0$ trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$: hàm số đồng biến trên hai khoảng này.

• $f'(x) < 0$ trên $(-1; 1)$: hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ với $y_{CĐ} = f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$ với $y_{CT} = f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Ngoài ra $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

a) Sai. Giao điểm của (C) với trục tung có hoành độ $x = 0$, tung độ $f(0) = 1$, đó là điểm $(0; 1)$ chứ không phải $M(1; 0)$.

b) Đúng. Theo xét dấu ở trên, $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-1; 1)$.

c) Sai. Cực đại của hàm số bằng 3; số -1 là giá trị cực tiểu.

d) Sai. Ta có

$$x^3 - 3x + 2 = 3m - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 3m - 3.$$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (C) với đường thẳng nằm ngang $y = 3m - 3$. Từ sự biến thiên: f tăng từ $-\infty$ đến 3 trên $(-\infty; -1]$, giảm từ 3 xuống -1 trên $[-1; 1]$, tăng từ -1 đến $+\infty$ trên $[1; +\infty)$.

• Nếu $3m - 3 > 3$ hoặc $3m - 3 < -1$: đường thẳng cắt (C) tại đúng 1 điểm.

• Nếu $-1 < 3m - 3 < 3$: đường thẳng cắt (C) tại 3 điểm.

• Nếu $3m - 3 = 3$ hoặc $3m - 3 = -1$: đường thẳng đi qua điểm cực đại hoặc điểm cực tiểu, cắt (C) tại đúng 2 điểm.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} 3m - 3 = 3 \\ 3m - 3 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Chỉ có **một** giá trị nguyên là $m = 2$, không phải hai giá trị.

Kết luận: a) Sai; b) Đúng; c) Sai; d) Sai.

NHẬN XÉT

Với phương trình chứa tham số, hãy **cô lập** tham số để đưa về dạng $f(x) = g(m)$ rồi dùng sự biến thiên của f. Phương trình bậc ba có đúng hai nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y = g(m)$ đi qua điểm cực đại hoặc điểm cực tiểu (tiếp xúc với đồ thị). Ở ý c), cần phân biệt "cực đại của hàm số" (giá trị $y_{CĐ}$) với "điểm cực đại" (giá trị x).

Bài 3 ★★☆

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $x = -2$ và $x = 1$ là các điểm cực trị của hàm số bậc ba nên chúng là hai nghiệm của tam thức bậc hai y'. Do đó

$$y' = 3a(x + 2)(x - 1) = 3ax^2 + 3ax - 6a.$$

Đồng nhất hệ số với $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ ta được $2b = 3a$, $c = -6a$, tức là $b = \frac{3a}{2}$, $c = -6a$.

Điểm $B(1;0)$ thuộc đồ thị:

$$a+b+c+d=0 \Leftrightarrow a+\frac{3a}{2}-6a+d=0 \Leftrightarrow d=\frac{7a}{2}.$$

Điểm $A(-2;3)$ thuộc đồ thị:

$$-8a+4b-2c+d=3 \Leftrightarrow -8a+6a+12a+\frac{7a}{2}=3 \Leftrightarrow \frac{27a}{2}=3 \Leftrightarrow a=\frac{2}{9}.$$

Suy ra $b=\frac{1}{3}$, $c=-\frac{4}{3}$, $d=\frac{7}{9}$.

Thử lại: $y'=\frac{2}{3}(x+2)(x-1)$ có hệ số $\frac{2}{3}>0$ nên $y'>0$ trên $(-\infty;-2)$, $y'<0$ trên $(-2;1)$, $y'>0$ trên $(1;+\infty)$. Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và cực tiểu tại $x=1$, đúng như giả thiết.

Do đó

$$a+9bc+d=\frac{2}{9}+9\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{7}{9}=1-4=-3.$$

Đáp số: -3.

NHẬN XÉT

Biết hai điểm cực trị x_1, x_2 của hàm bậc ba thì viết ngay $y'=3a(x-x_1)(x-x_2)$, nhờ đó b, c được biểu diễn theo a; hai điểm thuộc đồ thị cho thêm hai phương trình để tìm a, d. Đừng quên bước thử lại: dấu của a quyết định điểm nào là cực đại, điểm nào là cực tiểu.

Bài 4 ★★☆

Từ đồ thị, parabol $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ -1 và 2, cắt trục tung tại điểm $(0;-2)$. Do đó

$$f'(x)=k(x+1)(x-2), \qquad f'(0)=-2k=-2 \Rightarrow k=1.$$

Vậy $f'(x)=x^2-x-2$. Mặt khác $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ nên $3a=1$, $2b=-1$, $c=-2$, tức là

$$a=\frac{1}{3}, \quad b=-\frac{1}{2}, \quad c=-2, \quad d=f(0)=\frac{13}{6}.$$

Suy ra $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{13}{6}$.

Quan sát đồ thị của f': $f'(x)>0$ khi $x<-1$ hoặc $x>2$ (parabol nằm trên trục hoành), $f'(x)<0$ khi $-1<x<2$. Như vậy khi x đi qua -1, $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm, hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ (còn $x=2$ là điểm cực tiểu).

Giá trị cực đại:

$$f(-1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{13}{6} = \frac{-2-3+12+13}{6} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33.$$

Đáp số: 3,33.

NHẬN XÉT

Đọc đồ thị **của f' khác với đọc đồ thị của f**: giao điểm với trục hoành là điểm cực trị của f, phần đồ thị nằm trên trục hoành ứng với khoảng f đồng biến. Lỗi hay gặp là lấy giá trị $f'(-1) = 0$ hoặc $f'(0) = -2$ làm giá trị cực đại.

Bài 5 ★★★

Đặt $g(x) = f(1 - |x|)$. Vì $g(-x) = f(1 - |-x|) = g(x)$ nên g là hàm số chẵn, đồ thị của g đối xứng qua trục Oy. Ta xét $x > 0$ trước, rồi lấy đối xứng.

Bước 1. Đọc đồ thị của f trên $(-\infty; 1]$. **Từ hình vẽ, trên nửa khoảng này** f có đúng ba điểm cực trị: điểm cực tiểu $x_1 \in (-2; -1)$, điểm cực đại $x = -1$, điểm cực tiểu $x_2 \in (-1; 1)$. Cụ thể:

f nghịch biến trên $(-\infty; x_1)$, đồng biến trên $(x_1; -1)$, nghịch biến trên $(-1; x_2)$, đồng biến trên $(x_2; 1]$.

(Đường nét đứt tại $x = 1$ cho thấy f vẫn đang tăng khi đi qua $x = 1$, nên $x = 1$ không phải điểm cực trị của f.)

Bước 2. Xét g trên $(0; +\infty)$. **Với** $x > 0$ thì $g(x) = f(1 - x)$. Đặt $u = 1 - x$; khi x tăng từ 0 đến $+\infty$ thì u **giảm** từ 1 về $-\infty$, nên g biến thiên **ngược chiều** với f trên khoảng tương ứng của u:

• $u \in (x_2; 1)$ (f tăng) ứng với $x \in (0; 1 - x_2)$: g nghịch biến;

• $u \in (-1; x_2)$ (f giảm) ứng với $x \in (1 - x_2; 2)$: g đồng biến;

• $u \in (x_1; -1)$ (f tăng) ứng với $x \in (2; 1 - x_1)$: g nghịch biến;

• $u \in (-\infty; x_1)$ (f giảm) ứng với $x \in (1 - x_1; +\infty)$: g đồng biến.

Lưu ý $0 < 1 - x_2 < 2 < 1 - x_1$ (vì $-1 < x_2 < 1$ và $-2 < x_1 < -1$). Do đó trên $(0; +\infty)$, hàm g có đúng **3** điểm cực trị: $x = 1 - x_2$ (cực tiểu), $x = 2$ (cực đại), $x = 1 - x_1$ (cực tiểu).

Bước 3. Lấy đối xứng và xét $x = 0$. **Do** g chẵn, trên $(-\infty; 0)$ cũng có đúng 3 điểm cực trị $x = x_2 - 1$, $x = -2$, $x = x_1 - 1$.

Tại $x=0$: g nghịch biến trên $(0;1-x_2)$ và (do đối xứng) đồng biến trên $(x_2-1;0)$, hàm g liên tục tại 0, nên g đạt cực đại tại $x=0$ với giá trị $g(0)=f(1)$.

Vậy hàm số $y=f(-|x|+1)$ có $3+3+1=7$ điểm cực trị.

Đáp số: 7.

NHẬN XÉT

Với hàm dạng $f\big(u(|x|)\big)$: hàm chẵn nên chỉ cần đếm cực trị trên $(0;+\infty)$, nhân đôi, rồi **kiểm tra riêng** $x=0$. **Khi biến trong** f là $1-x$ (nghịch biến) thì chiều biến thiên bị đảo ngược; chỉ những điểm cực trị của f nằm trong $(-\infty;1)$ mới "sinh ra" cực trị của g, các điểm cực trị của f ở bên phải $x=1$ không ảnh hưởng.

DẠNG 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT VÀ BÀI TOÁN TỐI ƯU THỰC TẾ

Bài 6 ★☆☆

Gọi chiều rộng đáy là x (cm), chiều dài đáy là $2x$ (cm), chiều cao thùng là h (cm), với $x>0, h>0$.

Thùng không nắp gồm một đáy, hai mặt bên kích thước $x\times h$ và hai mặt bên kích thước $2x\times h$. Tổng diện tích vật liệu:

$$2x^2+2xh+2\cdot 2xh=216\Leftrightarrow 2x^2+6xh=216\Leftrightarrow h=\frac{108-x^2}{3x}.$$

Điều kiện $h>0$ cho $0<x<\sqrt{108}=6\sqrt{3}$. Thể tích thùng:

$$V(x)=x\cdot 2x\cdot h=2x^2\cdot\frac{108-x^2}{3x}=\frac{2x(108-x^2)}{3}=72x-\frac{2}{3}x^3,\quad 0<x<6\sqrt{3}.$$

Ta có $V'(x)=72-2x^2$, $V'(x)=0\Leftrightarrow x^2=36\Leftrightarrow x=6$ (vì $x>0$).

$V'(x)>0$ trên $(0;6)$ và $V'(x)<0$ trên $\big(6;6\sqrt{3}\big)$, nên V đạt giá trị lớn nhất tại $x=6$:

$$V(6)=72\cdot 6-\frac{2}{3}\cdot 216=432-144=288.$$

Khi đó $h=\frac{108-36}{18}=4$: thùng có kích thước 6 cm × 12 cm × 4 cm.

Đáp số: 288 cm^3.

NHẬN XÉT

Ba bước của mọi bài tối ưu: **chọn ẩn và điều kiện** → dùng giả thiết (diện tích cố định) để **khử bớt ẩn** → khảo sát hàm một biến trên khoảng điều kiện. Đừng quên thùng **không nắp** nên chỉ có một mặt đáy.

ĐỌC TIẾP BẢN ĐẦY ĐỦ

Bạn vừa đọc 6/30 bài của cuốn sách.

Bản đầy đủ gồm 30 bài, lời giải chi tiết và nhận xét – giá ưu đãi chỉ **39.000đ**.

Nhắn Zalo **0986 683 218** với nội dung: "T12HK1" để nhận sách ngay.

ĐĂNG KÍ HỌC THỬ MIỄN PHÍ

- Lớp Toán Thầy Thế Anh nhận học sinh THCS – THPT theo nhóm nhỏ, học **online** hoặc **trực tiếp** tại Hà Nội.
- Lớp nâng cao – học sinh giỏi, củng cố nền tảng và luyện đề kiểm tra trên lớp.
- Tặng **1 buổi học thử miễn phí** và **bài kiểm tra đánh giá năng lực** để thầy xếp lớp phù hợp.

Nhắn Zalo **0986 683 218** • Cú pháp: HỌC THỬ + LỚP 12 + TÊN HỌC SINH

Website: thaytheanh.com

BIÊN SOẠN

Thầy Thế Anh

Điện thoại / Zalo: **0986 683 218**

Website: thaytheanh.com

Quét mã QR để nhắn Zalo cho thầy hoặc vào nhóm học tập: hỏi bài trong sách, nhận thêm đề và tài liệu Toán.

Zalo Thầy Thế Anh
0986 683 218

Nhóm học tập Zalo
Quét để tham gia

Đề bài được tuyển chọn từ đề kiểm tra công khai của các trường; lời giải và nhận xét do Thầy Thế Anh biên soạn. Tài liệu dành cho học sinh sử dụng cá nhân – vui lòng không chia sẻ lại bản đầy đủ.