BẢN ĐỌC THỬ MIỄN PHÍ • 6/30 BÀI

TÀI LIỆU ÔN TẬP • TOÁN 9

30 BÀI TOÁN NÂNG CAO

Ôn thi cuối học kì 1 – Toán 9

Tuyển chọn từ đề cuối học kì 1 của các trường • Năm học 2024 – 2026

- ✓ 30 bài vận dụng – vận dụng cao chọn lọc từ đề thi thật của các trường
- ✓ Chia theo dạng toán, có mức độ ★ để luyện từ dễ đến khó
- ✓ Lời giải chi tiết từng bước + nhận xét, mẹo nhận dạng sau mỗi bài
- ✓ Ghi rõ nguồn đề (trường, năm học) – đã đối chiếu bản gốc

BIÊN SOẠN

Thầy Thế Anh

Điện thoại / Zalo: **0986 683 218**

Website: thaytheanh.com

Quét mã QR để nhắn Zalo cho thầy hoặc vào nhóm học tập: hỏi bài trong sách, nhận thêm đề và tài liệu Toán.

Zalo Thầy Thế Anh
0986 683 218

Nhóm học tập Zalo
Quét để tham gia

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh lớp 9 thân mến,

Trong đề kiểm tra cuối học kì 1, phần lớn điểm số nằm ở các câu cơ bản – nhưng để đạt điểm 9, điểm 10 thì các em phải làm được câu vận dụng và vận dụng cao cuối đề. Đây cũng là những câu phân loại học sinh khá – giỏi, và là nền tảng để thi học sinh giỏi, thi vào lớp 10 chuyên sau này.

Cuốn sách này tuyển chọn 30 bài như vậy từ đề thi thật của nhiều trường trong những năm gần đây, sắp xếp theo dạng để các em nhận ra "khuôn" của từng loại bài. Mỗi bài đều có lời giải chi tiết và phần nhận xét chỉ ra ý tưởng then chốt – điều quan trọng hơn cả đáp số.

Chúc các em ôn tập hiệu quả và đạt kết quả thật cao!

Thầy Thế Anh

CÁCH DÙNG SÁCH HIỆU QUẢ

Bước 1. Tự làm bài ít nhất 15–20 phút trước khi xem lời giải. Bí thì đọc lại tên dạng và phần nhận xét của bài trước đó trong cùng dạng.

Bước 2. Đối chiếu lời giải, chú ý cách trình bày – đây là cách trình bày được chấm đủ điểm.

Bước 3. Đọc phần **Nhận xét** và ghi lại ý tưởng chính vào sổ tay.

Bước 4. Sau 3–5 ngày, làm lại những bài đã sai mà không xem lời giải.

Mức độ: ★☆☆ vận dụng • ★★☆ vận dụng cao • ★★★ thử thách (dành cho HS giỏi).

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU **2**
PHẦN 1. ĐỀ BÀI **4**
DẠNG 1. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN VÀ BÀI TOÁN PHỤ 4
DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT VÀ BIẾN ĐỔI CĂN THỨC 4
PHẦN 2. LỜI GIẢI CHI TIẾT **5**
ĐỌC TIẾP BẢN ĐẦY ĐỦ **9**

PHẦN 1. ĐỀ BÀI

DẠNG 1. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN VÀ BÀI TOÁN PHỤ

Bài 1. (★☆☆) Cho hai biểu thức $A=\frac{x+3}{x-9}+\frac{2}{\sqrt{x}+3}$ và $B=\frac{1}{\sqrt{x}-3}$ (với $x\geq 0;\ x\neq 9$).

a) Tính giá trị biểu thức B khi $x=25$.

b) Rút gọn biểu thức $P=A-B$.

c) Tìm số tự nhiên x lớn nhất để $P\leq\frac{1}{3}$.

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 9 năm học 2024 – 2025, phòng GD&ĐT Chương Mỹ – Hà Nội)

Bài 2. (★☆☆) Cho hai biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\frac{x-5}{x-1}-\frac{2}{\sqrt{x}+1}+\frac{4}{\sqrt{x}-1}$ với $x\geq 0;\ x\neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=25$.

b) Chứng minh rằng: $B=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

c) Đặt $P=\frac{A}{B}$. Tìm giá trị x là số nguyên tố lớn nhất để $P<\frac{1}{2}$.

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 9 năm học 2025 – 2026, trường THCS Hát Môn – Hà Nội)

Bài 3. (★★☆) Cho $P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x>0$. Tìm tất cả các số thực x sao cho $x>\frac{1}{9}$ và P nhận giá trị nguyên.

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 9 năm học 2024 – 2025, trường THCS Nguyễn Công Trứ – Đà Nẵng)

Bài 4. (★★☆) Giá trị nguyên dương lớn nhất của x bằng bao nhiêu thì biểu thức $M=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$ đạt giá trị nguyên?

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 9 năm học 2025 – 2026, sở GD&ĐT Hưng Yên)

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT VÀ BIẾN ĐỔI CĂN THỨC

Bài 5. (★☆☆) Giải phương trình: $7x^2+y^2+4xy-24x-6y+21=0$.

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 9 năm học 2024 – 2025, phòng GD&ĐT Chương Mỹ – Hà Nội)

Bài 6. (★★☆) Giải phương trình $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$.

(Nguồn: Đề cuối học kì 1 Toán 9 năm học 2025 – 2026, trường THCS Ngô Gia Tự – Hà Nội)

PHẦN 2. LỜI GIẢI CHI TIẾT

DẠNG 1. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN VÀ BÀI TOÁN PHỤ

Bài 1 ★☆☆

a) $x = 25$ thỏa mãn điều kiện, khi đó $\sqrt{x} = 5$ nên $B = \frac{1}{5-3} = \frac{1}{2}$.

b) Với $x \geq 0, x \neq 9$ ta có $x - 9 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)$, do đó

$$P = \frac{x+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{x+3+2(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}.$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

c) Ta có

$$P \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-6-\sqrt{x}+3}{3(\sqrt{x}-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} \leq 0.$$

Vì $(2\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}-3) = \sqrt{x} \geq 0$ nên $2\sqrt{x}-3 \geq \sqrt{x}-3$. Phân thức trên không dương khi và chỉ khi tử không âm và mẫu âm, tức là

$$\begin{cases} 2\sqrt{x}-3 \geq 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq x < 9.$$

Các số tự nhiên thỏa mãn là $3; 4; 5; 6; 7; 8$ (đều thỏa mãn điều kiện xác định).

Kết luận: số tự nhiên x lớn nhất cần tìm là $x = 8$.

> **NHẬN XÉT**
>
> Khi giải bất phương trình chứa phân thức, **không được nhân chéo** vì chưa biết dấu của mẫu.
>
> Hãy chuyển vế về dạng $\frac{\text{tử}}{\text{mẫu}} \leq 0$ rồi xét dấu.

Bài 2 ★☆☆

a) $x = 25$ thỏa mãn điều kiện, $\sqrt{x} = 5$ nên $A = \frac{5-2}{5-1} = \frac{3}{4}$.

b) Với $x \geq 0, x \neq 1$:

$$B = \frac{x-5-2(\sqrt{x}-1)+4(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.$$

c) Vì $\sqrt{x}+1 > 0$ nên $B \neq 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 1$. Khi đó

$$P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}.$$

$$P < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-4-\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-5}{2(\sqrt{x}+1)} < 0.$$

Vì $2(\sqrt{x}+1) > 0$ nên $\sqrt{x}-5 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow x < 25$.

Kết hợp điều kiện: $0 \leq x < 25, x \neq 1$. Các số nguyên tố nhỏ hơn 25 là $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23$.

Kết luận: $x = 23$.

> **NHẬN XÉT**
>
> Mẫu $\sqrt{x}+1$ luôn dương nên chỉ cần xét dấu tử. Đừng quên đối chiếu điều kiện xác định trước khi chọn số nguyên tố lớn nhất.

Bài 3 ★★☆

Với $x > 0$ ta có $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Vì $x > \frac{1}{9}$ nên $\sqrt{x} > \frac{1}{3}$, suy ra $0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < 3$. Do đó $1 < P < 4$.

Mà P nguyên nên $P \in \{2; 3\}$.

Với $P = 2$: $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn $x > \frac{1}{9}$).

Với $P = 3$: $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn $x > \frac{1}{9}$).

Kết luận: $x \in \left\{1; \frac{1}{4}\right\}$.

NHẬN XÉT

Đề hỏi **số thực** x chứ không phải số nguyên, nên không dùng "ước". Cách đúng: **chặn** P trong một khoảng rồi thử các giá trị nguyên của P.

Bài 4 ★★☆

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 4$. Ta có

$$M = \frac{2(\sqrt{x}-2)+3}{\sqrt{x}-2} = 2 + \frac{3}{\sqrt{x}-2}.$$

Giả sử x nguyên dương và M nguyên. Khi đó $M \neq 2$ và $\sqrt{x}-2 = \frac{3}{M-2}$ là số hữu tỉ, nên $\sqrt{x}$ là số hữu tỉ.

Căn bậc hai của một số nguyên dương hoặc là số nguyên, hoặc là số vô tỉ. Do đó $\sqrt{x} = n$ với n là số nguyên dương, $n \neq 2$.

Khi đó $M = 2 + \frac{3}{n-2}$ nguyên khi và chỉ khi $n-2$ là ước của 3, tức $n-2 \in \{-3; -1; 1; 3\}$, suy ra $n \in \{-1; 1; 3; 5\}$.

Vì $n > 0$ nên $n \in \{1; 3; 5\}$, tương ứng $x \in \{1; 9; 25\}$ (thử lại: M lần lượt bằng $-1; 5; 3$).

Kết luận: giá trị nguyên dương lớn nhất của x là 25.

NHẬN XÉT

Lỗi hay gặp: mặc nhiên coi $\sqrt{x}$ là số nguyên. Phải lập luận "M nguyên $\Rightarrow \sqrt{x}$ hữu tỉ $\Rightarrow \sqrt{x}$ nguyên" (vì x nguyên dương) rồi mới xét ước.

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT VÀ BIẾN ĐỔI CĂN THỨC

Bài 5 ★☆☆

Ta tách vế trái thành tổng hai bình phương:

$$7x^2 + y^2 + 4xy - 24x - 6y + 21$$
$$= (y^2 + 4xy + 4x^2 - 6y - 12x + 9) + (3x^2 - 12x + 12)$$
$$= (y + 2x - 3)^2 + 3(x-2)^2.$$

Phương trình trở thành $(y + 2x - 3)^2 + 3(x-2)^2 = 0$.

Vì $(y + 2x - 3)^2 \geq 0$ và $3(x-2)^2 \geq 0$ nên đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x-2=0 \\ y+2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Kết luận: phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;-1)$.

NHẬN XÉT

Phương trình hai ẩn mà chỉ có một phương trình thường giải bằng cách **đưa về tổng các bình phương bằng 0**. Mẹo: gom hết các hạng tử chứa y vào một bình phương $(y+2x+c)^2$, phần còn lại chỉ chứa x.

Bài 6 ★★☆

Điều kiện xác định: $3x+10\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{10}{3}$.

Ta biến đổi phương trình:

$$x^2+9x+20-2\sqrt{3x+10}=0 \Leftrightarrow (x^2+6x+9)+\left(3x+10-2\sqrt{3x+10}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2+\left(\sqrt{3x+10}-1\right)^2=0.$$

Vì hai bình phương đều không âm nên

$$\begin{cases} x+3=0 \\ \sqrt{3x+10}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ 3x+10=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3.$$

Giá trị $x=-3$ thỏa mãn điều kiện $x\geq -\frac{10}{3}$.

Kết luận: phương trình có nghiệm $x=-3$.

NHẬN XÉT

Thấy $2\sqrt{3x+10}$ thì nghĩ ngay tới $\left(\sqrt{3x+10}-1\right)^2=3x+10-2\sqrt{3x+10}+1$; phần còn lại x^2+6x+9 là một bình phương — dấu hiệu của cách "tổng bình phương".

ĐỌC TIẾP BẢN ĐẦY ĐỦ

Bạn vừa đọc 6/30 bài của cuốn sách.

Bản đầy đủ gồm 30 bài, lời giải chi tiết và nhận xét – giá ưu đãi chỉ **39.000đ**.

Nhắn Zalo **0986 683 218** với nội dung: "T9HK1" để nhận sách ngay.

ĐĂNG KÍ HỌC THỬ MIỄN PHÍ

- Lớp Toán Thầy Thế Anh nhận học sinh THCS – THPT theo nhóm nhỏ, học **online** hoặc **trực tiếp** tại Hà Nội.
- Lớp nâng cao – học sinh giỏi – luyện thi vào 10 và 10 chuyên Toán.
- Tặng **1 buổi học thử miễn phí** và **bài kiểm tra đánh giá năng lực** để thầy xếp lớp phù hợp.

Nhắn Zalo **0986 683 218** • Cú pháp: HỌC THỬ + LỚP 9 + TÊN HỌC SINH

Website: thaytheanh.com

BIÊN SOẠN

Thầy Thế Anh

Điện thoại / Zalo: **0986 683 218**

Website: thaytheanh.com

Quét mã QR để nhắn Zalo cho thầy hoặc vào nhóm học tập: hỏi bài trong sách, nhận thêm đề và tài liệu Toán.

Zalo Thầy Thế Anh
0986 683 218

Nhóm học tập Zalo
Quét để tham gia

Đề bài được tuyển chọn từ đề kiểm tra công khai của các trường; lời giải và nhận xét do Thầy Thế Anh biên soạn. Tài liệu dành cho học sinh sử dụng cá nhân – vui lòng không chia sẻ lại bản đầy đủ.